Ю. Г. Гуляев
С. А. Чукмасов
А. В. Губинский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Ю. Г. Гуляев,
С. А. Чукмасов,
А. В. Губинский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1986

УДК 621.771.001(075.8)

Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением/Гуляев Ю. Г., Чукмасов С. А., Губинский А. В.— Киев: Наукова думка, 1986.— 240 с.

В монографии рассмотрены методы диагностирования сложных объектов, основанные на получении диагностических признаков путем обработки случайных процессов, характеризующих поведение объекта диагностирования. Описаны новые способы обработки сигналов во временной и частотных областях, применение методов последовательного анализа для диагностирования отдельных объектов. Изложены принципы организации структур специализированных вычислительных устройств повышенной надежности, реализуемых с применением микропроцессов.

Для научных и инженерно-технических работников, занимающихся изучением процессов пластического деформирования, разработки технологий и оборудования для обработки металлов давлением. Может быть полезна студентам вузов.

Ил. 86. Табл. 10. Библиогр.: с. 230—237 (143 назв.).

Ответственный редактор *Ю. Н. Таран*

Рецензенты *Н. С. Поляков, В. Н. Данченко*

Редакция технической литературы

Г $\frac{2704030000-081}{M221(04)-86}$ 463-86

© Издательство «Наукова думка», 1986

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одними из важнейших задач развития народного хозяйства на современном этапе являются снижение удельной металлоемкости машин, агрегатов и оборудования, существенное сокращение отходов и потерь при производстве металлопродукции.

Подавляющее большинство металлических изделий на той или иной стадии изготовления подвергаются пластическому формоизменению. По данным, представленным на Международной научной конференции «Обработка металлов давлением» (ПНР, Краков, 1982 г.), почти 98 % мирового производства стали подвергается процессам пластической деформации. В связи с этим разработка и промышленное внедрение системы мероприятий по комплексному совершенствованию процессов пластического формоизменения металлов являются важной народнохозяйственной задачей. Повышение эффективности процессов обработки металлов давлением (ОМД) представляет собой многогранную проблему, решение которой должно включать рассмотрение многих научно-технических и конструкторско-технологических аспектов производства. Основные пути развития процессов ОМД — это разработка новых и совершенствование существующих методов и технологических режимов обработки, а также проектирование и изготовление высокопроизводительного, мощного, надежного оборудования.

Конечная цель всех разработок в области ОМД — их соответствие одному или нескольким из следующих критериев: повышение производительности; снижение расходных коэффициентов металла; повышение качества продукции по показателям точности геометрических размеров, состояния поверхности, механическим свойствам и т. д.; расширение сортамента изделий в область ранее неосвоенных размеров, форм, материалов и их сочетаний; снижение энергоемкости процессов формоизменения.

Совершенствование существующих и создание новых технологических процессов, повышение эффективности действующего и проектирование нового оборудования для обработки металлов давлением требуют достоверной количественно-качественной оценки параметров, характеризующих процесс деформации. Описание сложного комплекса явлений, сопровождающих пластическое формоизменение металлов, невозможно без математического моделирования.

Предлагаемая книга посвящена вопросам использования методов математического моделирования при аналитическом и эмпирическом изучении процессов пластической деформации металлов.

В первой части приведена общая классификация математических моделей, дана структура алгоритмов создания аналитических и эмпирических моделей, рассмотрена общая аналитическая модель процесса обработки давлением, дан анализ некоторых известных и предложены новые методы реализации аналитических и создания экспериментальных моделей. Представлены результаты оригинальных разработок.

Во второй части приведены примеры реализации теоретических положений при создании моделей технологических процессов (прессование, прокатка в различных модификациях, обкатка).

Обзор, главы с первой по третью и седьмая написаны Ю. Г. Гуляевым, четвертая — Ю. Г. Гуляевым и С. А. Чукмасовым, пятая — всеми авторами совместно, шестая Ю. Г. Гуляевым и С. А. Чукмасовым, восьмая — А. В. Губинским. В книге использованы результаты разработок, выполненных М. З. Володарским (главы третья и четвертая) под научным руководством Ю. Г. Гуляева; в § 2 седьмой главы представлены результаты исследований, выполненных Ю. Г. Гуляевым совместно с Ю. В. Данченко. В составлении программ для ЭВМ и выполнении трудоемких статистических обработок результатов экспериментов принимали участие А. И. Головенчиц и Л. Г. Клюшник.

ОБЗОР РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ОМД

Теория обработки металлов давлением как самостоятельная научная область сформировалась к началу 30-х годов XX в. на основе трудов нескольких поколений механиков, физхимиков, металлофизиков, металлургов-технологов.

Современная теория ОМД базируется на фундаментальных исследованиях А. Ф. Головина, С. И. Губкина, И. М. Павлова, А. А. Ильюшина, А. П. Чекмарева, А. И. Целикова, Г. А. Смирнова-Аляева, В. С. Смирнова, П. И. Полухина, Е. П. Унксова, И. Я. Тарновского, И. Л. Перлина, А. Д. Томленова, А. А. Поздеева, В. Н. Выдрина, Г. Я. Гуна, В. Л. Колмогорова, А. П. Грудева, Л. Г. Степанского, В. Я. Остренко, Ю. Н. Тарана, И. Н. Потапова, Г. И. Гуляева, В. М. Друяна, В. К. Воронцова, В. Н. Данченко и др.

Теория ОМД — научная основа разработки, проектирования и оптимизации процессов пластического формоизменения металлов на всех стадиях обработки. По своей структуре теория ОМД синтетическая; она развивается по трем основным направлениям: механико-математическому, физическому и физико-химическому.

Механико-математическое направление базируется на основных положениях механики сплошной среды (теориях упругости, пластичности и ползучести) и изучает закономерности распределения полей напряжений, скоростей течения, деформаций и температур в деформируемой заготовке. Разработки, выполняемые в рамках этого направления теории ОМД, носят аналитический характер и сводятся к анализу некоторой краевой задачи математической физики. Их основная цель — получение достоверных данных о влиянии технологических параметров формоизменения на основные характеристики процесса пластического формоизменения исходной заготовки, а именно: полные усилия на рабочий инструмент; предельные деформации по условиям разрушения заготовки; энергетические затраты на формоизменение; механические характеристики и геометрические размеры готового продукта; распределение напряжений и температур по поверхности контакта заготовки и деформирующего инструмента.

Широкое внедрение в практику ОМД технологических смазок предопределило необходимость анализа условий совместного течения металла и охлаждающей жидкости в очаге деформации, что, в свою очередь, поставило теорию ОМД перед неизбежностью использования математического аппарата теории вязких жидкостей. Интенсификация процессов ОМД невозможна без учета неоднородности температурных полей, для расчета которых в теории ОМД совместно с уравнениями механики используют уравнения термодинамики.

Физическое направление изучает механизм пластической деформации, условия ее осуществления (переход от упругого к пластическому состоянию), связь механических свойств с условиями формоизменения,

закономерности нарушения сплошности (разрушения) при пластической деформации металлов и сплавов. Исследования носят в основном эмпирический характер; используется математический аппарат теории обработки экспериментальных данных. К физическому направлению теории ОМД можно отнести и разработки в области изучения энергосиловых и деформационных параметров формоизменения различными методами исследования в лабораторных условиях и на действующих промышленных агрегатах.

Физико-химическое направление изучает структурные изменения, происходящие при ОМД, и устанавливает связь химического состава и фазового состояния металлов и сплавов с их пластическими свойствами.

Все три направления неразрывно и органично связаны между собой; по мере развития теории ОМД тенденция к их слиянию становится все более очевидной. Результатом полного объединения трех направлений будет общая теория ОМД, в которой макро- и микропредставления о процессах пластического формоизменения опишутся едиными законами связи механических свойств металлов и сплавов, параметров их формоизменения, фазового состояния и химического состава.

Теория ОМД основывается на математическом описании количественно-качественной взаимосвязи исследуемых величин (параметров процесса), характеризующих комплекс явлений, сопровождающих пластическое формоизменение тел. Математическое описание процесса пластической деформации как физического процесса в своей основе базируется на наиболее общих законах и принципах механики и термодинамики: законах сохранения массы, энергии, количества и момента количества движения, принципе наименьшего действия.

В 1755 г. Л. Эйлер вывел уравнения движения идеальной однородной сплошной среды. Эти уравнения тождественно удовлетворяют условию сохранения количества движения.

В XVIII — начале XIX в. в работах П. Мопертюи (1746 г.), Ж. Лагранжа (1760—1761 гг.), В. Гамильтона (1834—1835 гг.) было дано математическое обоснование одного из важнейших принципов механики — принципа наименьшего действия. В работах К. Якоби (1865—1866 гг.) было доказано, что в применении к механике системы материальных точек принцип наименьшего действия (который часто именуют «принципом Гамильтона») эквивалентен законам И. Ньютона, представляя простую математическую формулировку законов движения любой консервативной системы при каких угодно связях. Распространенный на механику сплошной среды, он дает возможность выводить посредством относительно простых математических выкладок дифференциальные уравнения движения, аналогичные уравнениям Л. Эйлера. Из этого же принципа может быть получен закон сохранения энергии консервативных систем.

Закон сохранения энергии весьма широко используется в механике, однако, как было показано Л. Больцманом (1905 г.), исходя из энергетических принципов (закона сохранения энергии) вывести общие дифференциальные уравнения движения (в том числе законы движения сплошной среды) нельзя[1].

В 1822 г. О. Л. Коши опубликовал результаты своих исследований, которые можно рассматривать как первую научную работу по механике сплошной деформируемой среды, где привел уравнения связи деформаций и перемещений (формулы Коши), разработал систему уравнений связи девяти составляющих тензора напряжений в точке (усло-

[1] Широко известен вывод уравнений движения из закона сохранения энергии, сделанный Г. Гельмом (1890 г.); Л. Больцман доказал его математическую и методологическую ошибочность.

вие равновесия элементарного тетраэдра), дал обоснование закона парности касательных напряжений как математического аналога закона сохранения момента количества движения, установил связь между составляющими тензоров напряжений и упругих деформаций для изотропного сплошного тела.

Начиная со второй половины XIX в. теоретические и эмпирические исследования по изучению особенностей поведения материалов в условиях пластического формоизменения привлекают все большее число теоретиков и экспериментаторов. Механика сплошной пластически деформируемой среды формируется в самостоятельную науку, что было предопределено как интенсивным развитием техники и широким промышленным использованием процессов ОМД, так и установлением целого ряда особенностей, присущих процессам пластической деформации материалов вообще и металлов в частности.

В период с конца 60-х годов XIX в. до начала 30-х годов XX в. усилиями большой группы ученых в основном была решена ключевая проблема теории пластичности — условие перехода материала из упругого состояния в пластическое. В 1868 г. Х. Треска на основе экспериментов по одноосному деформированию предложил условие перехода от упругих деформаций к пластичности (условие пластичности, условие первого предельного состояния), в соответствии с которым вне зависимости от схемы напряженного состояния максимальное касательное напряжение должно достигнуть некоторой критической величины. Он же на основании опытов по выдавливанию твердых тел из цилиндрического контейнера через круглую матрицу разработал теорию, в соответствии с которой твердое тело, будучи подвергнуто достаточно сильному давлению, ведет себя как жидкость и течет в соответствии с законом наименьшего сопротивления. Этот вывод можно рассматривать как первую попытку феноменологического подхода к созданию абстрактной, идеализированной модели твердого пластически деформируемого тела. Использовав положения, выдвинутые Х. Треска, Б. Сен-Венан в конце XIX в. вывел основные уравнения теории пластичности для плоской деформации изотропного несжимаемого материала при допущениях о совпадении направления главных напряжений и деформаций и пропорциональности приращений компонентов пластической деформации соответствующим компонентам девиатора напряжений[1].

В начале нынешнего столетия М. Губер (1904 г.), а затем Р. Мизес (1913 г.) предложили условие пластичности, в соответствии с которым независимо от схемы напряженного состояния переход к пластическому течению материала наступает при равенстве интенсивности напряжений некоторой критической величине. В 1925 г. Г. Генки показал, что такая формулировка условия пластичности идентична утверждению о независимости общих энергетических затрат, необходимых для достижения материалов первого предельного состояния, от схемы напряженного состояния. Методика математического вывода условия пластичности, предложенная Г. Генки, наиболее используема до настоящего времени.

Экспериментальные исследования В. Лодэ, М. Роша и А. Эйхингера, А. И. Жукова, Г. А. Смирнова-Аляева и других показали, что условие текучести Мизеса — Губера — Генки несколько лучше согласуется с опытными данными, чем условие Треска — Сен-Венана.

Использовав результаты исследований Б. Сен-Венана, Л. Прандаля и других, Р. Мизес разработал основные положения теории объемного пластического течения жесткопластического тела при допущении

---

[1] Правомерность этих допущений была доказана позже в работах Р. Шмидта (1932 г.) и Е. Девиса (1934—1945 гг.).

о возможности пренебрежения компонентами упругой деформации по сравнению с компонентами пластической деформации. Эта теория послужила основой разработки первых аналитических методов приближенного определения энергосиловых параметров формоизменения в конкретных технологических процессах ОМД. Так, получил широкое распространение и не утратил до настоящего времени своего практического значения метод совместного решения уравнений пластичности и равновесия, основанный на допущениях «гипотезы плоских сечений», выдвинутой Т. Карманом. Был усовершенствован и получил дальнейшее развитие предложенный в конце XIX в. М. Леви метод линий скольжения (метод характеристик).

Развивая идеи теории Сен-Венана — Мизеса, Г. Генки и А. Надаи выдвинули гипотезу о пропорциональности компонентов пластической деформации соответствующим компонентам девиатора напряжений, что привело к созданию в 1925—1927 гг. теории упругопластических деформаций, которая получила законченную формулировку в трудах А. А. Ильюшина. Уравнения теории упругопластических деформаций являются уравнениями нелинейноупругого тела и находят широкое применение для решения практических задач.

Необходимость опытной проверки теоретических выводов, гипотез и предложений требовала от исследователей развития методов эмпирического изучения особенностей напряженно-деформированного состояния материалов в условиях пластического формоизменения.

Важное значение для теории пластичности имели эксперименты Д. Киркальди, показавшие, что при пластической деформации относительное изменение плотности обрабатываемого металла не превышает десятых долей процента. Этими опытами была доказана правомерность использования гипотезы несжимаемости в теоретических выкладках.

Серию интересных опытов поставил в конце XIX — начале XX в. Ф. Кикк. Сравнив энергетические затраты при формоизменении одинаковых заготовок на прессе и молоте, он установил (1885 г.), что количество работы, затрачиваемой на определенную деформацию тела, в случае удара всегда больше, чем при применении давления. Этот вывод позволил предположить, что предел текучести материала зависит от скорости деформации. Ф. Кикк провел серию опытов (1890—1908 гг.) по изучению влияния высоких давлений на свойства материалов; в частности, он установил, что при высоких гидростатических давлениях хрупкие вещества (мрамор, янтарь, каменная соль) приобретают способность к пластической деформации, и подтвердил тем самым гипотезу А. Гейма. Им же на экспериментах по осадке медных цилиндров между тонкими свинцовыми шайбами впервые было показано, что нормальные удельные давления распределяются от контактной поверхности неравномерно и у оси симметрии образца они максимальны.

Ф. Кикк заложил основы теории физического (натурного) моделирования процессов ОМД, установив закон «пропорционального сопротивления», в соответствии с которым количество работы, затрачиваемое на подобные формоизменения геометрически подобных тел из одного и того же металла, пропорционально их массе.

К первой трети XX в. относятся разработки, заложившие фундамент современных представлений о механизме пластической деформации металлов.

В 1900 г. В. Розенгайн установил, что процессы пластической деформации сопровождаются сдвиговым искажением формы зерен металла, но при этом кристаллическая структура самих зерен сохраняется. Впервые механизм деформации металлического монокристалла был изучен М. Полони (1923 г.), который установил ряд закономерностей,

сопровождающих этот процесс. Исследование механических свойств монокристаллов позволило выдвинуть предположение о влиянии искажений кристаллической решетки металла (дислокаций) на условия деформации (гипотезы Я. И. Френкеля, М. Полони, Е. Орована и др.). В работах Д. Тейлора, Ж. Фриделя, А. Х. Коттрела, И. А. Одинга и многих других исследователей это предположение оформилось в современную дислокационную теорию механизма пластического деформирования металлов.

Основы современного физико-химического направления теории ОМД были заложены выдающимся русским ученым Д. К. Черновым, который впервые установил (1868—1879 гг.) связь между температурой металла, его фазовым состоянием и механическими свойствами. Опыты П. Оберхоффера (1916 г.) и Ж. Чохральского (1923 г.) позволили установить зависимость между размерами кристаллических зерен металла и его механическими свойствами. Результатом этих исследований была разработка целой серии режимов термообработки, позволяющих целенаправленно регулировать механические свойства металлов и сплавов.

В результате проведенных исследований к началу 30-х годов XX в. была создана надежная научно-практическая база для развития теории ОМД как самостоятельной прикладной науки об особенностях пластического формоизменения металлов и сплавов и методах выбора его оптимальных параметров в конкретных условиях. Дальнейшее развитие теории ОМД связано с многоплановыми исследованиями большого числа ученых. Можно выделить (с определенной долей условности, конечно) следующие основные этапы развития теории ОМД, которые характеризуются различным уровнем изучаемых вопросов, решаемых проблем и используемых методов исследования и анализа.

Этап I (середина 30—50-х гг.) В этот период в работах А. А. Ильюшина получает свое завершение математическая теория пластичности. Развиваются приближенные методы определения энергосиловых параметров формоизменения металлов различными способами ОМД (С. И. Губкин, И. М. Павлов, А. И. Целиков, А. П. Чекмарев, П. Т. Емельяненко, Г. А. Смирнов-Аляев, С. И. Борисов, Е. П. Унксов, А. Д. Томленов и др.). Аналитические выкладки этого этапа проводятся методами совместного решения уравнений пластичности и равновесия элементарного объема с использованием гипотезы «плоских сечений», линий скольжения и сопротивления металлов пластическим деформациям в рамках допущений о плоском или осесимметричном характере деформации. Деформируемая среда в этих исследованиях идеализируется как идеальное жесткопластическое тело.

В это же время накоплены обширные экспериментальные данные о влиянии основных параметров формоизменения (температуры металла, скорости, степени деформации, условий контактного трения и т. д.) на распределение контактных напряжений, величины конечных деформаций исходной заготовки, а также на энергетические затраты в конкретных процессах ОМД.

Этап II (середина 50-х — конец 60-х гг.). Прежде всего этот этап характеризуется внедрением ЭВМ в практику анализа и расчета параметров ОМД. Широко внедряются новые методы теоретического изучения закономерностей пластического формоизменения металлов: энергетический, вариационно-энергетический, метод верхней оценки (И. Я. Тарновский, В. Н. Выдрин, А. А. Поздеев, О. А. Ганаго, В. Л. Колмогоров, Л. Г. Степанский, Д. Джонсон, Х. Кудо и др.). К этому периоду относятся разработки по использованию методов конформных отображений, сыпучих и математических аналогий при анализе параметров процессов ОМД (Г. Я. Гун, П. И. Полухин,

В. К. Воронцов и др.). В конце этого периода были сформулированы, и нашли экспериментальное подтверждение основные положения теории разрушения металлов при пластической деформации (Г. А. Смирнов-Аляев, В. Л. Колмогоров), что открыло широкие перспективы по оптимизации процессов ОМД в плане их интенсификации. В этот период совершенствуются методы исследования параметров ОМД на промышленных агрегатах и лабораторных установках, развивается теория моделирования, широко внедряются в практику идеи по моделированию реальных процессов с использованием материалов, имеющих отличные от натуры реологические свойства (А. П. Чекмарев, Ю.Н.Алексеев, А. П. Грудев, В.Я. Остренко, В. С. Смирнов, А. А. Динник, П. Л. Клименко, Г. И. Гуляев, А. К. Григорьев, В. М. Друян, В. Н. Данченко, Г. Г. Шломчак, А. И. Лисицын и др.).

В практику анализа результатов исследований внедряются статистические методы обработки эмпирических данных; широко используются элементы теории планирования экспериментов (Ю. П. Адлер, М. С. Винарский, М. В. Лурье, В. Г. Жадан и др.).

Этап III (с конца 60-х годов). Отличительная черта этого периода развития теории ОМД — резкое расширение круга рассматриваемых вопросов и решаемых проблем — неразрывно связана с прогрессом в области повышения быстродействия и увеличения объема оперативной памяти ЭВМ, созданием ЭВМ третьего и четвертого поколений (более подробно об этом речь пойдет ниже). При анализе конкретных технологических процессов широко используются конечноразностные и конечноэлементные численные методы. Возможность организации на ЭВМ сложных многоцикловых итерационных процессов открыла новые перспективы перед «инженерными» аналитическими методами теории ОМД. В некоторых случаях используют сложные склерономные и реономные модели деформируемой среды, что позволяет учесть эффект деформационно-скоростного упрочнения металла, изменение его свойств во времени. Развиваются методы совместного решения уравнений деформируемой среды и теплопроводности. Появляется возможность аналитического изучения особенностей течения многокомпонентных сред (систем металл — смазка, би- и полиметаллов), прогнозирования разрушения металла в ходе обработки. В начале периода предпринимаются первые попытки отказа от использования в теории ОМД детерминистских методов феноменологической механики сплошной среды (Г. Я. Гун, П. И. Полухин, Б. М. Готлиб и др.). Дальнейшие разработки в этом направлении привели к созданию весьма перспективного статистического метода решения задач о пластическом течении и разрушении металлов, который сейчас находится в стадии становления и развития.

Значительный интерес представляют первые и, что особенно важно, успешные попытки оптимизации по тем или иным параметрам некоторых технологических процессов на основе их комплексного аналитического или эмпирического изучения (В. В. Ериклинцев, Г. И. Гуляев, Д. С. Фридман, А. А. Костава, В. М. Друян и др.). Для реализации этой задачи используются некоторые методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами: динамическое программирование, метод случайного поиска (Монте-Карло), метод поэтапной оптимизации и др.

Изложенное выше позволяет констатировать, что к настоящему времени теорией ОМД накоплен значительный научный багаж и она располагает средствами для повышения эффективности процессов пластического формоизменения металлов и сплавов. Актуальным для теории ОМД вопросом является широкое комплексное внедрение ее достижений в практику решения конкретных технологических задач.

$\tilde{b}$ — коэффициент тепловой активности

$b_д$ — ширина очага деформации

e — эксцентриситет калибра относительно оси прокатки

$e_к$ — осевая деформация, $e_к = e_{iк}$ $(i = к)$

$\dot{e}_к$ — скорость осевой деформации, $\dot{e}_к = \dot{e}_{iк}$ $(i = к)$

$e_{iк}$ — компоненты тензора деформаций

$\dot{e}_{iк}$ — компоненты тензора скоростей деформаций

f — коэффициент трения

H — интенсивность скоростей сдвиговых деформаций, $H = \sqrt{2\eta_{iк}\eta_{iк}}$

J — механический эквивалент тепла

k — сдвиговый предел текучести, $k = \sigma_т/\sqrt{3}$

k_t — коэффициент теплопроводности

$l_д$ — длина очага деформации

$\vec{p}$ — нормальная составляющая вектора поверхностного напряжения

$p_ж$ — давление рабочей жидкости в контейнере гидроэкструзионного пресса

R_0, R_1 — радиус внешнего контура заготовки соответственно до и после прессования ($R_1 = R_т$ при прессовании труб)

$R_{оп}$, r_0 — соответственно радиусы цилиндрической и конической оправок

R — функция, описывающая профиль прессовой матрицы

$R_{ко}$ — радиус контейнера пресса

$R_в$ — радиус прокатного валка (для калиброванных валков — радиус в вершине калибра)

$\tilde{R}$ — невязка

$S_{iк}$ — компоненты девиатора напряжений

T — интенсивность сдвиговых напряжений, $T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{iк}S_{iк}}$

T_σ — симметричный тензор напряжений, $T_\sigma = [\sigma_{iк}]$

$T_{\dot{e}}$ — симметричный тензор скоростей деформации, $T_{\dot{e}} = [\dot{e}_{i\text{к}}]$

T_e — симметричный тензор деформаций, $T_e = [e_{i\text{к}}]$

t — время

v, v_i — соответственно скорость и ее составляющие

$v_\text{б}$ — скорость движения бойков при осадке

$v_\text{ж}$, $v_{\text{ж}i}$ — соответственно полная скорость потока жидкости (смазки) и ее составляющие

$v_\text{ш}$ — скорость движения прессштемпеля

v_0, v_1 — скорость движения металла соответственно на входе и выходе из очага деформации при прессовании и прокатке

α, β, m, n, к, i, j — целочисленные индексы порядковых номеров коэффициентов и величин

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ — эмпирические коэффициенты, отражающие влияние соответственно давления и температуры на вязкость смазки

α_a — коэффициент теплоотдачи

$\alpha_\text{м}$ — полуугол конусности прессовой матрицы

β^* — коэффициент Лодэ, $\beta^* = 1{,}00 \div 1{,}15$

Γ — интенсивность сдвиговых деформаций, $\Gamma = \sqrt{2\varepsilon_{i\text{к}}\varepsilon_{i\text{к}}}$

$\delta_{i\text{к}}$ — симметричный символ Кронекера

∇^2 — оператор Лапласа

ε_i — интенсивность деформаций

$\varepsilon_{i\text{к}}$ — компоненты девиатора деформаций

$\eta_{i\text{к}}$ — компоненты девиатора скоростей деформации

η_δ — эмпирический коэффициент, отражающий влияние логарифмической деформации δ_Σ на σ_s

γ_p — эмпирический коэффициент, отражающий влияние высокого гидростатического давления на предел текучести

$\gamma_{i\text{к}}$ — сдвиговая деформация, $\gamma_{i\text{к}} = e_{i\text{к}}$ $(i \neq \text{к})$

$\dot{\gamma}_{i\text{к}}$ — скорость сдвиговой деформации, $\gamma_{i\text{к}} = \dot{e}_{i\text{к}}$ $(i \neq \text{к})$

Θ — координатный угол в цилиндрической системе координат $zr\Theta$

θ — температура

$\varkappa_t$ — коэффициент температуропроводности

Λ — накопленная вдоль траектории течения интенсивность сдвиговых деформаций (параметр Одквиста), $\Lambda = \int_t H dt$

Λ_p — предельная степень деформации сдвига до разрушения

Λ_e — интенсивность сдвиговых деформаций, отвечающая условию перехода материала в пластическое состояние

λ_θ — эмпирический коэффициент, отражающий влияние температуры на предел текучести

μ — динамическая вязкость

μ_0 — вязкость смазки при атмосферном давлении и градуировочной температуре θ_0

μ_Σ, μ_e — соответственно общая и текущая вытяжка

ρ — плотность

$\rho_в$, $\rho_д$, $\rho_т$ — внутренний радиус трубчатой заготовки соответственно до деформации, в очаге деформации и после деформации

σ_i — интенсивность напряжений

$\sigma_{вн}$ — осевое напряжение от внешнего воздействия

$\sigma_{i\kappa}$ — компоненты тензора напряжений

σ_κ — нормальные напряжения, $\sigma_\kappa = \sigma_{i\kappa}$ $(i = \kappa)$

$\vec{\sigma_n}$ — вектор поверхностного напряжения

$\sigma_т$ — предел текучести (условный)

σ_s — напряжение текучести (сопротивление деформации), $\sigma_s = \sqrt{3}\,T$

σ_0 — компоненты шарового тензора напряжений (гидростатическое напряжение), $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sum_{\kappa=1}^{3}\sigma_\kappa$

σ_{s0}, σ_{s1} — пределы текучести соответственно материала заготовки и изделия

$\vec{\tau}$ — касательная составляющая вектора поверхностного напряжения

$\tau_{i\kappa}$ — касательные напряжения, $\tau_{i\kappa} = \sigma_{i\kappa}$ $(i \neq \kappa)$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ОМД

Глава первая

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ОМД

1. Классификация математических моделей

Все физические явления (в том числе пластическое формоизменение металлов) характеризуются совокупностью параметров, определяющих состояние системы, в которой протекает процесс. Очевидно, что для использования математических методов при изучении физических процессов необходимо располагать математическим описанием законов изменения параметров во времени, их взаимосвязи друг с другом и начальными условиями. Такое описание и будем называть математической моделью процесса, (или, если не будет оговорено особо,— просто моделью).

Параметры физического процесса можно подразделить (рис. 1) на определяющие и параметры отклика. Первая группа — совокупность параметров, определяющих условия протекания процесса; вторая группа — совокупность параметров, характеризующих результат осуществления физического процесса. В процессах ОМД определяющими параметрами являются профиль и скорость деформирующего инструмента, температура заготовки, ее фазовый и химический состав, условия контактного взаимодействия и т. д.; параметры отклика — металлографическая структура, температура, качество поверхности и точность геометрических размеров готового изделия, скорости течения, напряжения, деформации и скорости деформации, размеры зоны пластического формоизменения и др.

Очевидно, что параметры отклика зависят от определяющих параметров, «подчинены» им. Установление законов этой взаимосвязи — цель математического моделирования процессов. Основная трудность при решении задачи моделирова-

ния состоит в многообразии определяющих параметров.

При изучении любого процесса невозможно учесть (зафиксировать) всю совокупность определяющих параметров, при которых он протекает. Следовательно, прежде всего всю массу определяющих параметров следует подразделить на учтенные и неучтенные. Не исключен случай, когда влияние неучтенных параметров на параметры отклика весьма существенно. При этом математическая модель не будет отвечать критерию достоверности, и попытку ее создания следует признать неудачной. Выбор параметров, подлежащих учету, во многом определяется опытом и интуицией исследователя, наличием соответствующих приборов, аппаратуры, средств вычислительной техники и т. п. Возможен случай, когда неучтенные параметры изменяются случайным образом в некоторых пределах и конкретной совокупности регулируемых и нерегулируемых учтенных определяющих параметров соответствует совокупность параметров отклика, колеблющихся в некотором интервале по вероятностным законам. При этом возможно создание стохастической математической модели процесса, обладающей определенным уровнем достоверности, который можно оценить методами статистики. Если неучтенные параметры не влияют на параметры отклика (такой вариант, как правило, можно рассматривать как чисто гипотетический) и каждой конкретной совокупности учтенных определяющих параметров соответствует однозначно определенная совокупность параметров отклика, можно говорить о создании детерминированной математической модели процесса.

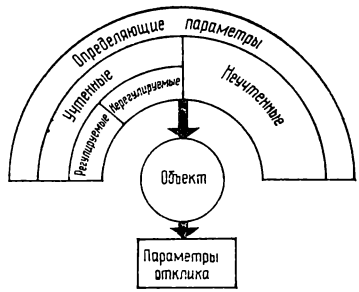

Рис. 1. Структура параметров физического процесса

Как детерминированные, так и стохастические модели могут быть созданы одним из четырех путей (рис. 2):

1) осмысливанием явления, процесса, высказыванием предположений о его характере и гипотез о взаимосвязи параметров (эвристический путь);

2) прямым наблюдением явления (эмпирический путь);

3) упрощением более общей модели за счет использования некоторых допущений о характере протекания процесса (дедуктивный путь);

4) использованием совокупности моделей, каждая из которых описывает частные закономерности протекания процесса (индуктивный путь).

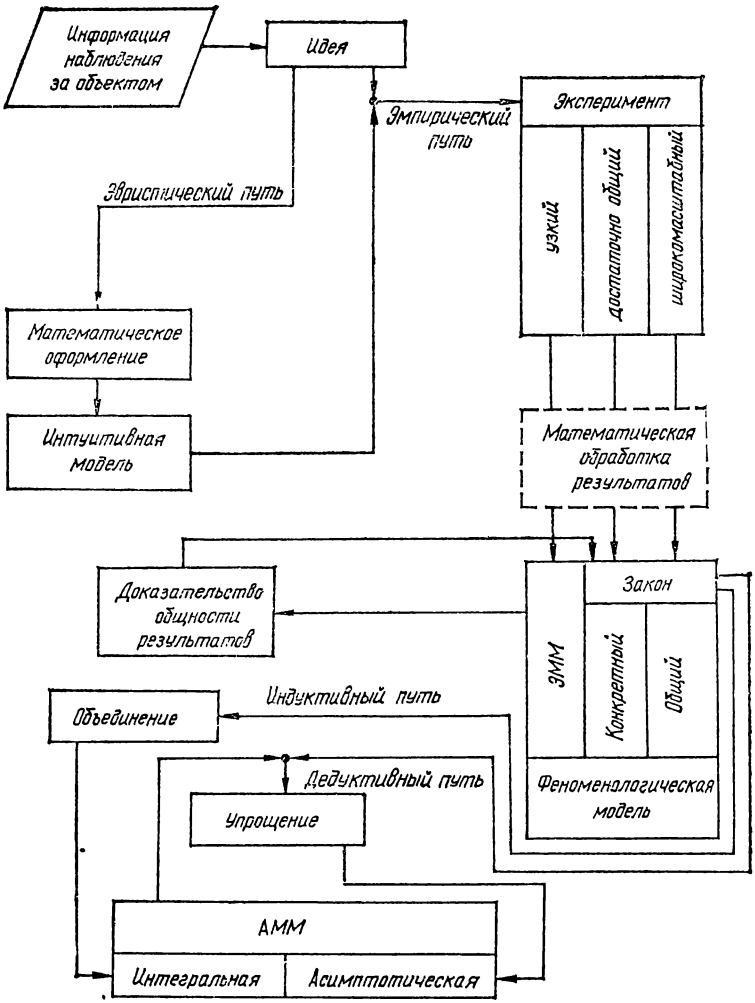

Рис. 2. Схема путей создания и трансформации математических моделей

Примером создания модели эвристическим путем (такие модели будем называть интуитивными) могут служить законы механики, полученные на основании математической интерпретации определенных (не всегда правильных) философских воззрений и гипотетических концепций их авторов.

В качестве модели, созданной эмпирическим путем (такие модели называются феноменологическими), можно рассматри-

вать реономное уравнение состояния металла, связывающее напряжение течения σ_s с параметрами формоизменения (скорость, степень деформации, температура, время). Используя дедуктивный путь, предположим в виде допущения, что σ_s не зависит от времени, и получим склерономное уравнение состояния металла — новую математическую модель, которую будем называть асимптотической.

Индуктивный путь создания математических моделей (такие модели назовем интегральными) используют для описания сложных процессов. Так, например, объединяя уравнения состояния, течения, теплопроводности и так далее, являющиеся «простыми» моделями, описывающими частные свойства системы, можно создать модель объемного неизотермического течения металла со сложными реологическими свойствами. Примером создания интегральной модели может служить и условие текучести Мизеса—Шлейхера, в котором основные положения теории Мизеса дополнены условием связи напряжения текучести и гидростатического напряжения σ_0.

Многократно проверенные на практике (в различных условиях воздействия неучтенных параметров) интуитивные и феноменологические математические модели приобретают форму физических законов, на базе которых могут создаваться как асимптотические, так и интегральные модели. Если при создании модели используют физические законы, то о такой модели можно говорить как об аналитической (теоретической) математической модели (АММ). Если при создании модели используют данные эксперимента и общность модели не доказана (не установлена, не очевидна или вызывает сомнения), то можно говорить о ней как об экспериментальной математической модели (ЭММ).

Предложенные систематизационные принципы требуют некоторых пояснений. Прежде всего отметим, что не каждый физический закон может быть непосредственно проверен на практике. Например, первый закон И. Ньютона, являющийся математической формулировкой его мировоззрения на характер движения, принципиально не может быть проверен, так как нигде во Вселенной не существует условий, при которых на материальное тело не действуют силы. Однако то, что этот закон уже более трех столетий успешно используют в практических целях, можно рассматривать как косвенное подтверждение его достоверности. Таким образом, требования критерия практики в общем случае следует рассматривать в более широком, чем прямой эксперимент, смысле: если модель позволяет достичь поставленных целей в широком классе практических задач, она может квалифицироваться как закон. Иллюстрацией к сказанному могут служить различные модели

сплошной деформируемой среды (модели Сен-Венана, Бингама, Оствальда—Рейнера и др.). Каждая из этих моделей в определенных, довольно широко распространенных на практике условиях (например, модель Оствальда—Рейнера при горячей, а модель Бингама — при холодной деформации металлов) дает возможность определять значения σ_s с достаточной для практических целей точностью. Это позволяет квалифицировать в конкретных условиях эти модели как законы. В отличие от физических (общих) законов, такие законы можно назвать конкретными. Математические модели, построенные с использованием конкретных законов, также будем относить к классу АММ.

2. Принципы создания математических моделей

Выбор класса модели. На основе системной классификации, приведенной выше, можно констатировать, что принципиально создание математической модели возможно двумя путями: аналитическим и экспериментальным. В первом случае полученная модель класса АММ гарантированно обладает общностью, определяемой рамками пригодности использованных при ее создании законов. Во втором случае полученная модель класса ЭММ гарантированно пригодна (естественно, если доказана ее адекватность) для изучения объекта, на котором получены экспериментальные данные, использованные при ее создании.

Прежде всего рассмотрим «за» и «против», возникающие перед исследователем на первом этапе творческой работы — при выборе класса модели (решение проблемы выбора: АММ или ЭММ?).

Изучение процесса на модели класса ЭММ. Часто наиболее полную и надежную информацию о реальном физическом процессе, особенно при большом числе определяющих параметров, можно получить лишь путем прямого экспериментального исследования на полномасштабной установке в натурных условиях. В большинстве случаев проведение исследований в условиях действующего (реального) технологического агрегата нецелесообразно или невозможно по следующим причинам: объект исследования отсутствует в натурных условиях (нужно проанализировать связь определяющих параметров и параметров отклика объекта, находящегося в стадии разработки или проектирования); проведение исследования объекта невозможно по технологическим соображениям (на реальном агрегате, например прокатном стане, невозможно установить соответствующую измерительную аппаратуру); проведение ис-

следования связано со значительными издержками экономического характера (необходимо на некоторое время остановить технологический процесс, требуется дорогостоящая аппаратура, большое число обслуживающего персонала и т. д.); объектом исследования являются параметры отклика, неподдающиеся фиксации (например, распределение полей скоростей и напряжений в очаге деформации и т. п.).

Альтернативой может служить проведение экспериментов на маломасштабных установках — физических моделях. Используемые при этом правила моделирования физических процессов и законы теории подобия позволяют в ряде случаев успешно экстраполировать полученные результаты на натурный объект. В этом случае ЭВМ, созданная при изучении физической модели, обладает определенной общностью, и ее можно квалифицировать как конкретный закон поведения группы подобных систем в подобных условиях. Однако довольно часто, в силу сложности реального процесса или отсутствия соответствующего теоретического обоснования, моделирование процесса либо экстраполяцию полученных результатов осуществить не удается.

Изучение процесса на модели класса АММ. В этом случае исходным объектом наблюдения и источником информации является не реальный процесс, а некоторая абстракция в виде интегральной или асимптотической математической модели, созданная в результате использования законов, описывающих связь определяющих параметров и параметров отклика реального объекта. При теоретическом исследовании анализируются результаты решения некоторой математической задачи, а достоверность сделанных при этом выводов и рекомендаций определяется целым рядом факторов: обоснованностью использования тех или иных законов, уровнем их общности и достоверности; погрешностью, вносимой используемыми допущениями; погрешностью, вносимой использованием тех или иных методов приближенных вычислений.

Достоверность АММ может быть подтверждена только путем сравнения значений расчетных и экспериментальных величин исследуемых параметров отклика.

Из сказанного следует, что дать однозначный ответ на вопрос о предпочтительном использовании того или иного класса математических моделей невозможно. В каждом конкретном случае исследователь должен оценить ресурсы имеющейся в его распоряжении материальной базы, проанализировать опыт предыдущих, сходных по своему содержанию и структуре исследований. При этом не последнюю, а часто решающую роль может сыграть чисто субъективный фактор («я более силен в теории, чем в эксперименте», и наоборот).

На основании практического опыта по изучению процессов ОМД отметим, что правильно организованное исследование в зависимости от существа проблемы, целей, имеющихся материально-экономических и других ограничений должно сочетать в разумных пропорциях как аналитические, так и экспериментальные методы.

Алгоритм создания АММ. Математическому описанию любого процесса, явления, системы предшествует стадия идеализации объекта, которая состоит из следующих этапов: интеграция определяющих технологических параметров (ОТП); дифференциация ОТП на учитываемые и неучитываемые в рамках создаваемой модели; дифференциация учитываемых ОТП на переменные и постоянные в рамках создаваемой модели.

Интеграция ОТП в своей основе должна базироваться на опыте предыдущих исследований и интуиции исследователя; на этом этапе (рис. 3) выделяются все технологические параметры $\Sigma X_i^{(0)}$, которые (действительно или предположительно) воздействуют на параметры (параметр) отклика ΣY_i, являющиеся предметом анализа в рамках проводимой научной разработки по изучению конкретного технологического процесса.

На втором этапе создания АММ проводится «отсев» несущественных, по мнению исследователя, ОТП $\Sigma X_i^{(н)}$. В результате этой операции окончательно формируется группа учитываемых ОТП $\Sigma X_i^{(у)}$, влияние которых на исследуемые параметры отклика ΣY_i необходимо установить.

Дифференциация учитываемых ОТП на переменные $\Sigma X_i^{(V)}$ и постоянные $\Sigma X_i^{(C)}$ в рамках создаваемой модели диктуется особенностями протекания реального процесса, подвергающегося моделированию, либо чисто математическими соображениями, связанными с возможностью реализации модели.

Сформировав блок $\Sigma X_i^{(V)} + \Sigma X_i^{(C)} = \Sigma X_i^{(у)}$ переменных и постоянных ОТП, можно приступить к выбору соответствующих физических и конкретных законов, связывающих этот блок и исследуемые параметры отклика функциями $\Phi_i(\Sigma X_i^{(у)}, \Sigma Y_i, \Sigma P_i)$, где ΣP_i — сумма физических определяющих, параметров, которые не были ранее учтены в качестве ОТП, но входят в выбранные уравнения связи Φ_i в виде переменных $\Sigma P_i^{(V)}$ и постоянных $\Sigma P_i^{(C)}$ величин. На этом этапе важно в полном объеме использовать имеющуюся научную информацию о физических (механических, термодинамических и т. д.) законах, характеризующих функции связи Φ_i. Как правило, прежде всего отбираются необходимые физические законы, базирующиеся на условиях сохранения. Законы сохранения —

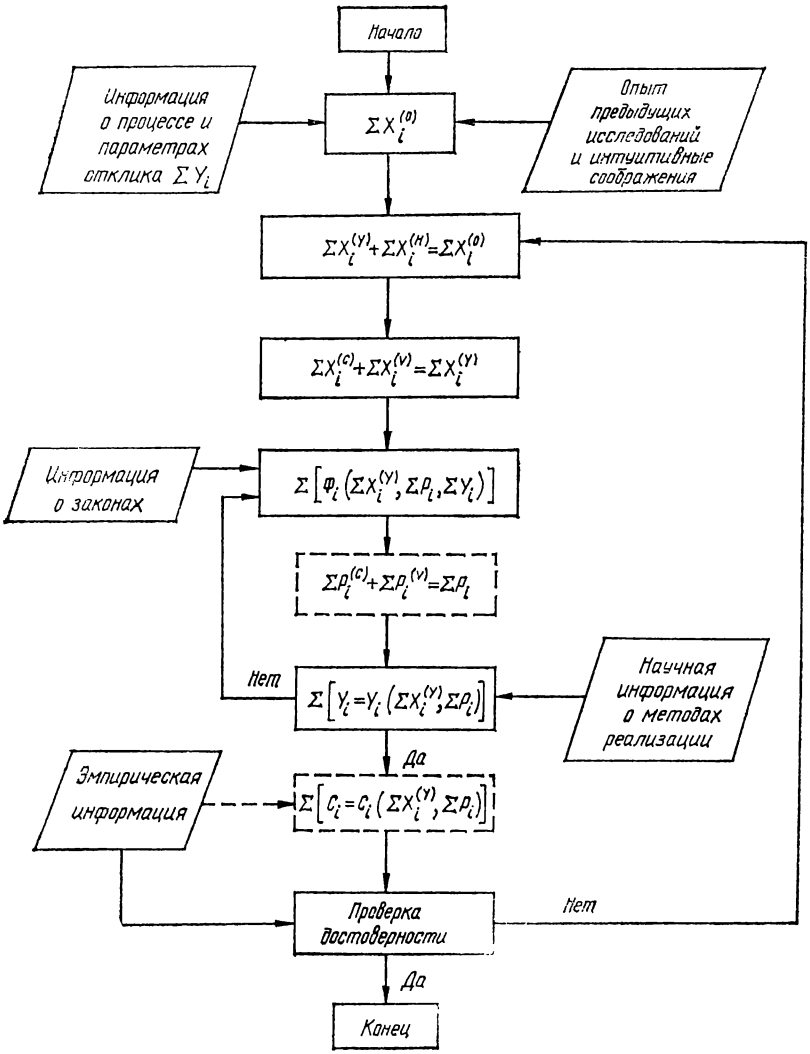

Рис. 3. Блок-схема алгоритма создания АММ

это основа любого аналитического модельного описания. Эти законы не исчерпывают информации о процессе и обычно не дают полного замыкания системы уравнений модели $\Sigma\Phi_i$, без которого невозможно провести ее математический анализ. Необходимо использование конкретных законов, получаемых из опыта,— уравнений состояния, связи между тензо-

рами деформаций и скоростей деформаций, зависимости эмпирических коэффициентов от $\Sigma X_i^{(y)}$ и т. д.

Далее следует этап реализации задачи, на котором должна быть решена система уравнений $\Sigma\Phi_i$ и получена связь $Y_i = Y_i(\Sigma X_i^{(y)}, \Sigma P_i)$. Этот этап наиболее трудоемок и сложен.

Для процессов ОМД математическая модель даже при большом числе упрощающих допущений состоит главным образом из системы дифференциальных уравнений. Если бы для решения этих уравнений использовались только методы классической математики, то решение целого ряда важных для практики задач оказалось невозможным. В связи с этим совершенствование прикладных математических методов и развитие ЭВМ играют решающую роль при создании современных АММ.

Достоверность связей $Y_i = Y_i(\Sigma X_i^{(y)}, \Sigma P_i)$ устанавливается путем сравнения расчетных и экспериментальных значений Y_i. При этом в ряде случаев о достоверности модели судят по результатам сравнения расчетных и экспериментальных значений параметров отклика, не являющихся основным объектом исследования модели.

Весьма часто идентификации реального объекта и АММ добиваются методом расчета коэффициентов соответствия, суть которого состоит в следующем. Несколько (как правило, один-два) параметров $P_i^{(C)}$ определяют как коэффициенты соответствия C_i путем отождествления экспериментальных и расчетных значений какого-либо из параметров отклика при конкретном наборе значений $\Sigma X_i^{(y)}$, ΣP_i. Составной частью модели считают зависимость $C_i = C_i(\Sigma X_i^{(y)}, \Sigma P_i)$, которую рассматривают как конкретный закон. Примером такого приема могут служить многие формулы для расчета полного усилия деформации, в которых коэффициент трения практически утратил свой физический смысл и является не чем иным, как коэффициентом соответствия АММ реальному процессу.

В случае, если в результате выполнения объема работ, приведенных на рис. 3, получена адекватная АММ, процесс ее создания можно считать законченным. Это, конечно, не означает, что закончена работа с моделью как объектом исследования. Далее следуют этапы численных экспериментов на модели, обработки расчетных данных, выбора оптимальных параметров процесса и формирования конкретных технологических рекомендаций.

Как следует из приведенной на рис. 3 блок-схемы алгоритма создания АММ, необходимость коррекции модели может быть вызвана двумя причинами: невозможностью ее реализа-

ции либо неадекватностью. Первая причина определяется сложностью модели, вторая — большим числом упрощений, принятых на стадиях формирования блоков $\Sigma X_i^{(y)}$ и ΣP_i. В идеале АММ должна быть, с одной стороны, настолько сложной, чтобы удовлетворять целям своего создания, а с другой — быть достаточно простой и включать лишь действительно необходимые для конечного результата Φ_i. В умелом выборе ингредиентов этой пропорции и состоит истинное искусство ученого.

На основании нашего опыта создания АММ конкретных процессов ОМД можно рекомендовать как более продуктивный путь последовательного усложнения модели. На первом этапе исследования выбираются по возможности наиболее простые законы связи Φ_i, использование которых определяется относительно грубыми упрощающими допущениями о характере анализируемого процесса. При этом, конечно, необходимо отдавать себе отчет в том, отвечает ли модель при сделанных допущениях хотя бы в первом приближении тем целям, которые преследуются при ее разработке. Следуя рекомендуемому методу, модель постепенно усложняют, добиваясь необходимого уровня ее адекватности на основании сравнения расчетных и эмпирических значений Y_i. При таком подходе устраняется опасность «засорения» АММ второстепенной математической информацией.

Алгоритм создания ЭММ. Создание моделей класса ЭММ основано на статистической обработке эмпирических данных. Принципиально методы создания ЭММ можно разделить на методы, основанные на обработке случайных экспериментальных данных, и методы, основанные на использовании теории планированных (активных) экспериментов. Основное преимущество методов первой группы — возможность создания математической модели процесса без изменения существующих режимов работы объекта исследования (путем фиксации соответствующих определяющих параметров и параметров отклика в ходе пассивного наблюдения). Вторая группа методов характеризуется в первую очередь возможностью создания достоверной ЭММ по минимальной исходной эмпирической информации, что обеспечивается планомерным изменением определяющих параметров в заранее установленных на основании соответствующих законов и правил пределах.

Проведение экспериментов в соответствии с методом предварительного планирования пределов и уровней изменения определяющих параметров процесса для анализа реальных процессов ОМД получило относительно ограниченное распространение по двум причинам: 1) как правило, на действующих технологических агрегатах невозможно изменять определяю-

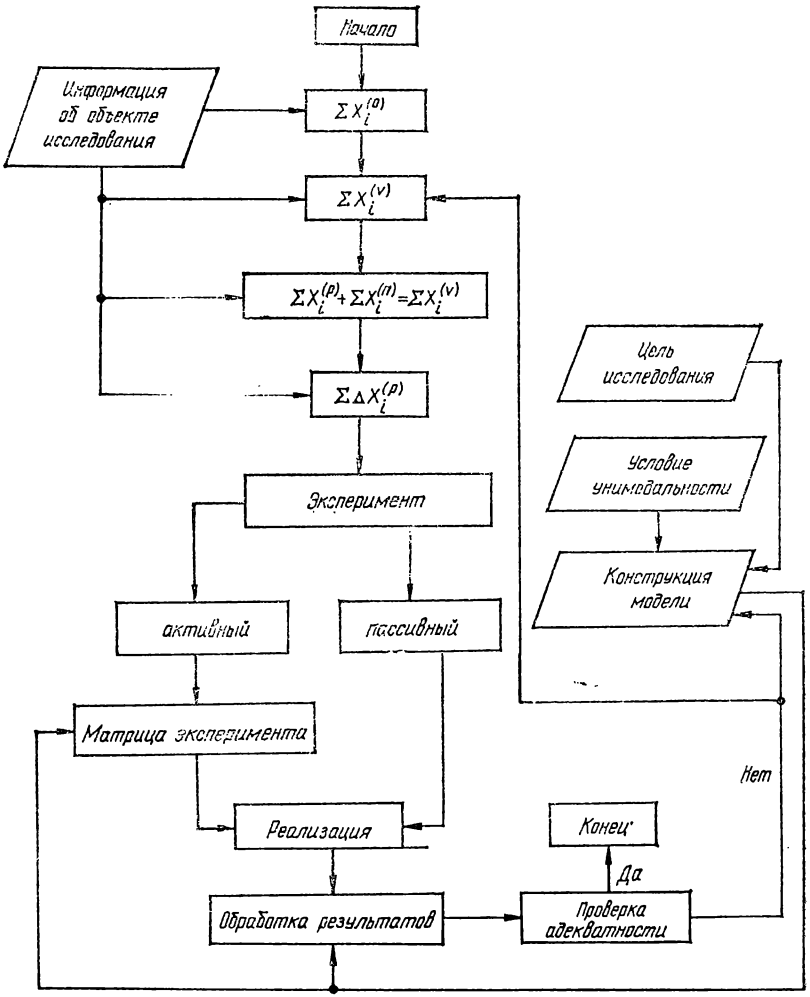

Рис. 4. Блок-схема алгоритма создания ЭММ

щие параметры процесса, фиксируя их значения на определенных, заранее назначенных уровнях; 2) обычно целью создания ЭММ является оптимизация изучаемого процесса, что предопределяет необходимость нелинейного описания связи определяющих параметров и параметров отклика. При создании методами планированного эксперимента нелинейных относительно определяющих параметров ЭММ матрица эксперимента включает значительное число сочетаний значений

ОТП процесса, а проведение исследования по заранее разработанной схеме зачастую связано со значительными трудностями технологического, материального и организационного характера. В связи с указанными сложностями проведение активных экспериментов при исследовании процессов ОМД применяется на стадии их лабораторной (полупромышленной) апробации.

На первой стадии работы по созданию ЭММ (рис. 4) из всей массы определяющих параметров $X_i^{(0)}$ выделяют переменные $X_i^{(V)}$. Далее анализируют возможности регулирования параметров $X_i^{(V)}$, подразделяя их на регулируемые $X_i^{(p)}$ и нерегулируемые (переменные) $X_i^{(n)}$, устанавливают возможные пределы изменения $X_i^{(V)}$ в условиях конкретного объекта исследования. После этого делают вывод о том, каким методом проводить эксперимент. Если есть возможность изменения $X_i^{(p)}$ по заранее намеченному плану, то можно ставить вопрос о проведении активного эксперимента. При этом желательно иметь некоторую, пусть чисто интуитивную, уверенность в том, что случайные колебания $X_i^{(n)}$ в пределах $\Delta X_i^{(n)}$ незначительно повлияют на исследуемые параметры отклика Y_i. Если возможность реализации матрицы планированного эксперимента отсутствует, используют случайные экспериментальные данные, фиксируя бессистемно изменяющиеся сочетания $X_i^{(V)}$, Y_i. При сборе случайной статистической информации в ряде случаев целесообразно ослабить технологические требования, допустив колебания $X_i^{(V)}$ в более широких, чем это имеет место в реальном процессе, пределах. Завершают процесс создания ЭММ этапы математической обработки собранной информации и проверки адекватности модели (более подробно структура этих этапов будет рассмотрена ниже).

3. Оптимизация процессов ОМД с использованием математических моделей

Все создаваемые математические модели конкретных технологических процессов в зависимости от характера решаемых с их помощью оптимизационных задач можно подразделить на качественно- и количественно-оптимизационные. Первая группа моделей связывает между собой регулируемые $X_i^{(p)}$, нерегулируемые $X_i^{(n)}$ учтенные определяющие параметры и параметры отклика Y_i процесса зависимостями монотонного вида. Примером качественно-оптимизационной ЭММ может служить формула Э. Зибеля для определения величины уширения при прокатке

$$\Delta b = (0{,}35 \div 0{,}45)\, R_в^{0{,}5} \Delta h^{1{,}5} h_0^{-1}, \qquad (1.1)$$

где Δb — уширение; Δh — обжатие заготовки вследствие пластической деформации; h_0— начальная толщина заготовки.

На основании формулы (1.1) можно рассчитать конкретное значение уширения и сделать вывод о том, что, например, уменьшение обжатия Δh снижает величину уширения (т.е. дать качественную оценку связи).

Количественно-оптимизационные модели позволяют дать количественные рекомендации по выбору параметров $X_i^{(p)}$ в связи с решением некоторой оптимизационной задачи. Пусть, например, требуется определить значение обжатия Δh, при котором отсутствует уширение Δb. Формула (1.1) в области реальных значений обжатий не позволяет дать ответ на этот вопрос; в то же время в соответствии с формулой Б. П. Бахтинова

$$\Delta b = 0{,}57\Delta h^{1{,}5} h_0^{-1} (R_в^{0{,}5} - 0{,}5\Delta h^{0{,}5} f^{-1}), \qquad (1.2)$$

можно получить количественную рекомендацию для решения поставленной задачи[1]:

$$\Delta h = 4f^2 R_в, \qquad (1.3)$$

в связи с чем формулу (1.2) можно рассматривать как количественно-оптимизационную АММ.

Приведенные примеры дают основание для вывода о том, что одна и та же математическая модель в зависимости от объекта и задачи оптимизации может быть как качественно-так и количественно-оптимизационной. Если, например, сформулировать задачу оптимизации в виде вопроса: при каком значении начальной толщины полосы уширение будет минимальным?, то АММ (1.2), так же как и ЭММ (1.1), даст лишь качественный ответ: чем больше h_0, тем меньше Δb.

Рассмотренные примеры позволяют сделать еще один очень важный с практической точки зрения вывод, суть которого состоит в том, что один и тот же процесс, явление, объект всегда могут быть описаны различными математическими зависимостями. Сделанный вывод открывает широкие перспективы в плане варьирования сложностью разрабатываемых моделей в зависимости от тех целей, для которых они создаются. Это особенно важно при создании ЭММ, так как объем экспериментальных исследований и математической обработки данных резко возрастает с усложнением модели.

Подавляющее большинство оптимизационных технико-экономических задач сводится к определению экстремальных

---

[1] Приведенные примеры носят чисто иллюстративный характер; уровень достоверности и границы применимости формул (1.1) и (1.2) не входят в круг рассматриваемых в этом разделе вопросов.

значений некоторых параметров отклика и величин соответствующих им определяющих параметров. Решение этой задачи с чисто математической точки зрения сводится к исследованию топологии некоторой гиперповерхности $Y = Y \times \times (X_i^0, P_i)$. Вычислительная математика располагает довольно эффективными методами решения этой задачи. Наиболее часто используемые методы поиска экстремума систематизированы на рис. 5. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, анализ которых не укладывается в рамки настоящей работы.

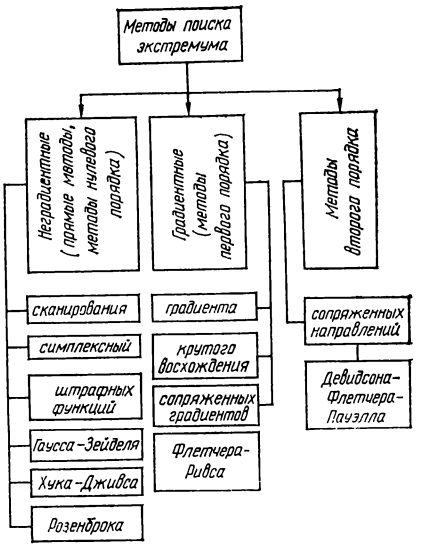

Рис. 5. Структура методов поиска экстремума

Реальные оптимизационные задачи, как правило, многомерны. Их реализация связана с проблемой, которую, по весьма удачному выражению математика Д. Дж. Уайлда, называют «проклятием размерности». Указанная проблема включает два аспекта: многомерные функции в большинстве случаев неунимодальны, и гиперповерхность отклика Y имеет значительное число локальных экстремумов; решение многомерной задачи всегда связано с трудностями численной формулировки характеристик точности определения определяющих параметров. Для преодоления первой из указанных сложностей можно использовать прием «конструирования функций», суть которого состоит в следующем.

При разработке ЭММ на стадии планирования активного эксперимента или перед математической обработкой случайных экспериментальных данных конструируется функция $Y = Y(X_i^{(0)}, a_j)$, где a_j — коэффициенты регрессии, подлежащие определению в результате математической обработки эмпирической информации. При этом функцию $Y(X_i^{(0)}, a_j)$ представляют в виде, удовлетворяющем условию унимодальности:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i^{(0)}} \text{ единожды для } X_i^{(0)} \in X_i^*, \qquad (1.4)$$

где X_i^* — заданная область допустимых значений определяющего параметра $X_i^{(0)}$.

При использовании АММ результаты численных экспериментов обрабатывают с целью создания уравнений регрессии $Y = Y(X_i^{(V)}, P_i^{(V)}, a_j)$, отвечающих условию унимодальности относительно переменных ОТП $X_i^{(V)}$, аналогичному условию (1.4). Прием конструирования функций, отвечающих условию (1.4), поддается формальному математическому описанию, и ниже будут приведены алгоритмы его реализации на ЭВМ.

Естественно, что накладывая на функцию отклика ограничение (1.4), мы не можем добиться высокой степени адекватности математической модели и реального объекта. Тем не менее использование изложенной методики в ряде случаев позволяет получить довольно эффективные результаты. Причина этого факта очень лаконично и четко объясняется тем, что реальные системы всегда имеют размытые максимумы, т. е. небольшие отклонения параметров от оптимальных значений не должны сколько-нибудь существенно отражаться на характеристиках проектируемой системы. Значит, обычно решение оптимизационных задач не требует очень высокой точности расчетов [1].

Многие практические задачи теории ОМД носят альтернативный характер. Примером может служить проблема выбора оптимальной длины концевой обрези на готовом прокате: снижение длины обрези снижает расходный коэффициент металла, но повышает вероятность отбраковки по условию несоблюдения требований ГОСТа на точность продукции; требуется определить длину обрези, обеспечивающую максимальный выход годного. Решение задач такого типа требует привлечения математического аппарата теории вероятностей.

Иногда задача оптимизации конкретного технологического процесса ОМД сводится к проблеме оптимального распределения ограниченного ресурса некоторого параметра. К этому классу относятся, например, задачи по оптимальному распределению деформационных параметров между клетями многоклетевых прокатных станов. Для их решения используются методы динамического программирования и случайного поиска (Монте—Карло).

При решении некоторых конкретных задач иногда приходится сталкиваться с проблемой поиска значений X_i, удовлетворяющих условиям типа $Y_0 = Y^*$; $\inf Y = Y^*$; $\sup Y = Y^*$ (здесь Y^*— одно из значений множества Y). Решение задач такого типа можно рассматривать как проблему оптимизации с ограничениями.

Изобретение ЭВМ коренным образом изменило методы решения разнообразных практических математических задач. С внедрением их в практику решения конкретных задач качественно изменилась постановка последних. Как отмечалось выше, математические модели реальных физических процессов представляют собой, как правило, системы сложных дифференциальных и интегральных уравнений, решение которых невозможно методами классической математики. Основные идеи методов приближенных вычислений были сформулированы в XVII—XIX вв. И. Ньютоном, К. Ф. Гауссом, Л. Эйлером, П. Л. Чебышевым, Н. И. Лобачевским, Э. Зейделем и многими другими математиками, однако только возможность использования ЭВМ открыла перед этими методами перспективу широкого практического использования.

Основные свойства ЭВМ как инструмента выполнения операций над числами можно охарактеризовать очень лаконично: быстродействие и большой объем памяти. До изобретения ЭВМ исследователи, обладая теорией решения сложных задач, не могли использовать ее на практике, так как осуществление численных приближенных решений связано с выполнением огромного числа расчетов. Быстродействие ЭВМ решает эту проблему. Вторая сложность численного решения задач состоит в необходимости выполнения операций с огромным количеством чисел; большой объем памяти ЭВМ позволяет справиться и с этой сложностью.

Современные однопроцессорные ЭВМ на больших интегральных схемах выполняют до $5 \cdot 10^6$ операций в секунду (имеются прогнозы о возможном увеличении этого числа в ближайшие 5—10 лет до 10^7— 10^8), а производительность вычислительных систем с матричной магистральной и ассоциативной структурами составляет 10^8— 10^9 операций в секунду; оперативная память современных ЭВМ достигает 10 и более М-байтов. Важнейшая отличительная черта ЭВМ — возможность компактной длительной «консервации» информации и ее практически мгновенного вызова, что сводит к минимуму работу над составлением программы расчетов за счет использования стандартных подпрограмм (вычисления интегралов, дифференциалов, решения систем уравнений и т. д.). Указанные свойства ЭВМ делают их незаменимыми помощниками исследователей при проведении численных экспериментов с использованием АММ и создании ЭММ.

Глава вторая

ИНТЕГРАЛЬНАЯ АММ ПРОЦЕССА ОМД

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим краевую задачу механики сплошной среды, моделирующую наиболее общий случай ОМД.

Некоторая область W сплошной среды (рис. 6), ограниченная замкнутой поверхностью Σ, включает в себя подобласть пластического течения $D \in W$, ограниченную замкнутой поверхностью S. Поверхности $S_v \in S$ и $S_Q \in S$ отделяют подобласть течения D от жестких частей D_1 и D_2 области W, в которых отсутствуют деформации ($D_1 \in W$, $D_2 \in W$, $D + D_1 + D_2 = W$). По поверхностям $S_\tau \in \Sigma$ и $S_\sigma \in \Sigma$ подобласть D подвергается внешнему воздействию со стороны областей W_1 и W_2 соответственно (применительно к рассматриваемой задаче: W_1 — конечномерная замкнутая область, инструмент; W_2 — полупространство, окружающая среда). По поверхностям $\Sigma_1 \in \Sigma$ и $\Sigma_2 \in \Sigma$ подобласти D_1 и D_2 соответственно подвергаются воздействию со стороны полупространства W_2.

Оговорим следующие наиболее общие допущения, которые будут использованы при рассмотрении задачи.

1. В области W_1 и подобластях D_1, D_2 области W имеет место поступательное движение сплошной среды как абсолютно твердого тела и выполняется условие $H = 0$.

2. Упругими деформациями в подобласти D пренебрегаем вследствие наличия развитого пластического течения преимущественно в большей части подобласти.

3. В подобласти D векторное поле скорости пластического течения $v = (\vec{v})$ является соленоидальным безвихревым (т. е. гармоническим):

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0; \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0. \tag{2.2}$$

Из допущений (2.1), (2.2) следует, что $v = (\vec{v})$ является непрерывным потенциальным полем, а тензорное поле напряжений не включает в себя моментных составляющих. Сделанные допущения о характере поля скорости пластического течения базируются на гипотезах неразрывности и несжимаемости деформируемого материала.

4. Рассматриваемые скалярные, векторные и тензорные поля регулярны в подобласти D.

5. В подобласти D справедлива гипотеза «замороженных связей» [2], что позволяет при определении полных производных $\frac{d}{dt}$ скалярных $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$ и векторных $(\vec{\varphi})$ функций считать локальные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}$ равными нулю и приравнивать $\frac{d}{dt}$ конвективным производным:

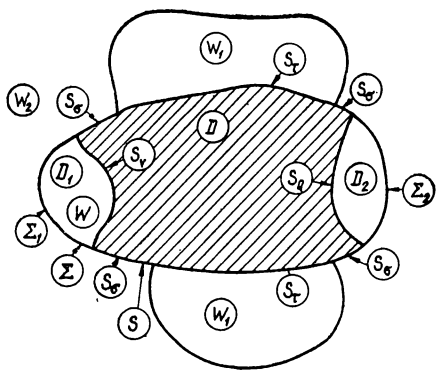

Рис. 6. Схема постановки краевой задачи ОМД

$$\frac{d\varphi}{dt} = \vec{v}\,\mathrm{grad}\,\varphi; \tag{2.3}$$

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{\partial \varphi_к}{\partial x_i} v_i \vec{e}_к; \tag{2.4}$$

где $\vec{e}_к$ — орты координатного базиса.

6. Течение в подобласти D отвечает общим закономерностям теории процессов малой кривизны [3], и может быть установлена однозначная связь параметров деформации в виде закона

$$T = T(H, \Lambda, \theta). \tag{2.5}$$

Динамические, кинематические, деформационные и термодинамические характеристики процесса связаны следующими уравнениями.

1. Уравнение движения, которое с учетом инерционных и массовых сил в соответствии с принципом Даламбера имеет вид

$$\mathrm{div}\, T_\sigma + \rho\vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{2.6}$$

где $\vec{F}$ — плотность массовых сил, $\vec{F} = \lim\limits_{\Delta D \to 0} \left[\vec{F}_м \left(\int\limits_{\Delta D} \rho dD \right)^{-1} \right]$;

$\vec{F}_м$ — главный вектор массовых сил, действующий на элемент массы $\Delta m = \int\limits_{\Delta D} \rho\, dD$.

Уравнение движения (2.6) путем тождественных преобразований [4] можно представить в виде

$$\iiint\limits_D \rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right) dD + \oiint\limits_S \vec{\sigma}_n \, dS = 0. \qquad (2.7)$$

Выражение (2.7) представляет собой математическую запись закона сохранения количества движения подобластью D в целом как физическим телом. Тождественность выражений (2.6) и (2.7) позволяет констатировать, что при отсутствии инерционных и массовых сил выполнение уравнений статического равновесия элементарного объема по всей области течения адекватно выполнению условия статического равновесия всего деформируемого тела в целом.

Также отметим, что для симметричного тензора напряжений T_σ соблюдение (2.6) в подобласти D адекватно условию сохранения момента количества движения в целом всем деформируемым телом

$$\iiint\limits_D (\vec{x} \times \rho\vec{F}) \, dD + \oiint\limits_S (\vec{x} \times \vec{\sigma}_n) \, dS = 0, \qquad (2.8)$$

где $\vec{x}$ — радиус-вектор элемента объема dD.

2. Определяющее уравнение связи напряжений и скоростей деформаций (уравнения Сен-Венана—Мизеса)

$$\sigma_{ik} = \frac{2T}{H} \dot{e}_{ik} + \delta_{ik}\sigma_0. \qquad (2.9)$$

3. Компоненты тензора скоростей деформации $T_{\dot{e}}$ и скорости течения связаны законом

$$\dot{e}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \qquad (2.10)$$

4. Уравнение теплопроводности, связывающее температуру θ в данной точке подобласти D с механическими, термодинамическими характеристиками и параметрами течения в той же точке, можно записать в виде закона

$$\frac{d\theta}{dt} = \eta(\nabla^2\theta + aTH), \qquad (2.11)$$

где $a = GI^{-1}k_t^{-1}$; G — коэффициент Тейлора—Фаррена, учитывающий соотношение между диссипацией и поглощением энергии деформации.

2. Формулировка задачи и граничные условия

Уравнения (2.1), (2.5), (2.6), (2.9)—(2.11) представляют собой систему законов, описывающих состояние среды в каждой точке подобласти течения D. Система включает 18 неизвестных компонентов (параметров отклика): 6 компонент тензора напряжений σ_{ik}; 6 компонент тензора скоростей деформации $\dot{e}_{ik}$; 3 компоненты векторного поля скорости течения среды v_i; гидростатическое напряжение σ_0; интенсивность сдвиговых напряжений T; температуру θ; и в «развернутом виде» состоит из 18 уравнений: 3 уравнения движения (2.6); 6 уравнений связи (2.10); 6 определяющих уравнений (2.9); уравнение несжимаемости; реологическое уравнение (2.5); уравнение теплопроводности (2.11).

Учитывая наличие цепочки-связи $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}\{\dot{e}_{ik}(v_i), \sigma_0, T[\theta, H(\dot{e}_{ik}(v_i)), \Lambda(H(\dot{e}_{ik}(v_i)), t(v_i, x_i))]\}$, $\theta = \theta[T(v_i, t(v_i, x_i)), H(v_i)]$, можно свести описанную систему 18-ти уравнений с 18-ю неизвестными компонентами тензорных, векторных и скалярных полей к системе 5-ти уравнений

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0; \tag{2.12а}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \delta_{ik}\sigma_0\right] + \rho F_i = \rho \frac{dv_i}{dt}; \tag{2.12б}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \eta(\nabla^2\theta + a\mu H^2); \tag{2.12в}$$

где $\mu = \dfrac{T(v_i, \theta)}{H(v_i)}$.

Система уравнений (2.12а—в) включает 5 неизвестных величин: v_i, σ_0, θ, поиск которых является целью ее решения для последующего вычисления σ_{ik}, $\dot{e}_{ik}$, T.

В общем случае задачу определения полей $v = (\vec{v})$, $T_\sigma = |\sigma_{ik}|$, $T_{\dot{e}} = [\dot{e}_{ik}]$ и так далее, можно рассматривать как задачу установления математического закона связи между временными и пространственными изменениями полей $v(\vec{x}, t)$, $\sigma_0(\vec{x}, t)$, $\theta(\vec{x}, t)$. В соответствии с допущением 5 (см. (2.3), (2.4)), при решении задачи рассмотрению подвергаются стационарные голономные связи, в математическом описании полей отсутствуют время и производные по времени в явном виде, что достигается (в случае необходимости) заменами типа $t = t(\vec{x}, v_i)$.

Решение рассматриваемой задачи как краевой задачи математической физики неразрывно связано с естественными начальными и граничными условиями.

В силу того что мы ограничиваемся рассмотрением стационарных связей, будем считать, что все рассматриваемые ниже граничные условия не включают в свое описание время в явном виде, т. е. являются стационарными. В силу введения этого условия для явно зависящих от времени (реономных) граничных условий необходимо анализировать условия течения в небольшом интервале времени, в течение которого граничные условия можно считать изохронными (склерономными).

Механические граничные условия. В подобласти D_1 задан вектор скорости поступательного движения[1] $\vec{v}_1^* = v_1^* \vec{e}_{v_1}^*$, где $\vec{e}_{v_1}^*$ — единичный вектор направления скорости поступательного движения в подобласти D_1. Условие неразрывности поля скоростей на поверхности S_v имеет вид кинематического граничного условия

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_1^* = 0, \tag{2.13}$$

где $\vec{v}_1$ — скорость течения на поверхности S_v, $\vec{v}_1 = \vec{v}(D)|_{S_v}$.

На поверхности Σ_1 подобласть D_1 подвергается локальному воздействию внешней сосредоточенной нагрузки $\vec{Q}_1^* = Q_1^* \vec{e}_{v_1}^*$. При этом допускаем, что геометрические параметры подобласти D_1 позволяют использовать гипотезу Сен-Венана об эквивалентности действия распределенной и сосредоточенной нагрузок. Это определяет следующее динамическое граничное условие для поверхности S_v:

$$\vec{\sigma}_{n1} - \vec{q}_1 = 0, \tag{2.14}$$

где $\vec{\sigma}_{n1}$ — поверхностное напряжение на S_v, $\vec{\sigma}_{n1} = (\sigma_{ik} n_k \vec{e}_i)|_{S_v}$; n_k — проекции единичного вектора нормали к поверхности; q_1 — эквивалентное распределенное напряжение, $q_1 = \dfrac{Q_1^* \vec{e}_{v_1}^*}{F_v}$; F_v — площадь поверхности S_v[2].

В подобласти D_2 задано направление (но не величина) вектора поступательного движения $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_{v_2}^*$. Условие нераз-

---

[1] Здесь и далее наличие «звездочки» в обозначении величины (a^*, a_* и т. д.) указывает на то, что она грани чно задана.

[2] Будем считать, что для любой точки $M \in S_v$ выполняется условие постоянства знака скалярного произведения векторов $\vec{n}_M \vec{e}_{v_1}$, где $\vec{n}_M$ — единичный вектор нормали к S_v с направлением из D в D_1.

рывности поля скоростей на S_Q имеет вид кинематического граничного условия

$$\vec{e}_{v_2} - \vec{e}^*_{v_2} = 0, \tag{2.15}$$

где $\vec{e}_{v_2}$ — единичный вектор направления скорости течения на S_Q, $\vec{e}_{v_2} = e_v(D)|_{S_Q}$.

На поверхности Σ_2 действует нагрузка $\vec{Q}^*_2 = Q^*_2 \vec{e}^*_{v_2}$, причем на нее распространяются оговорки, сделанные выше для нагрузки $\vec{Q}^*_1$. Это приводит к следующему динамическому граничному условию для S_Q:

$$\vec{\sigma}_{n2} - \vec{q}_2 = 0, \tag{2.16}$$

где $\vec{\sigma}_{n2}$ — поверхностное напряжение на S_Q; $\vec{q}_2$ — эквивалентное распределенное напряжение, $\vec{q}_2 = \dfrac{Q^*_2 \vec{e}^*_{v_2}}{F_Q}$; F_Q — площадь поверхности S_Q (с теми же оговорками, что и для S_v).

На S_σ действуют поверхностные напряжения $\vec{\sigma}_n$, направления которых противоположны направлению единичного вектора нормали $\vec{n}$ к поверхности S_σ, направленной из D в W_2:

$$\vec{\sigma}_n = -p^*_n \vec{n}, \tag{2.17}$$

где p^*_n — гидростатическое давление в области W_2.

Динамическое граничное условие для S_σ имеет вид

$$\vec{\sigma}_{n3} - \vec{\sigma}_n = 0, \tag{2.18}$$

где $\vec{\sigma}_{n3}$ — поверхностное напряжение на S_σ, $\vec{\sigma}_{n3} = (\sigma_{ik} n_k \vec{e}_i)|_{S_\sigma}$.

На S_τ, являющейся поверхностью контакта деформирующего инструмента и формоизменяемого материала, заданы нормальная $v^*_n = v^*_и \vec{n}^*$ и касательная $\vec{v}^*_\tau$ к поверхности инструмента составляющие вектора скорости поверхности инструмента $\vec{v}^*_и$. Условие непроницаемости на S_τ имеет вид кинематического граничного условия

$$v_n - v^*_n = 0, \tag{2.19}$$

где v_n — нормальная к поверхности S_τ составляющая скорости течения, $v_n = \vec{n}^* \vec{v}(D)|_{S_\tau}$.

Кроме того, на S_τ задан закон распределения касательных напряжений $\tau^*(S_\tau)$ — закон внешнего трения, в силу которого на S_τ имеет место динамическое граничное условие

$$\vec{\tau} - \tau^* \vec{e}_\tau = 0. \tag{2.20}$$

Здесь $\vec{e}_\tau$ — единичный вектор направления контактного касательного напряжения, $\vec{e}_\tau = -\dfrac{\Delta\vec{v}}{|\Delta\vec{v}|}$; $\Delta\vec{v}$ — вектор скорости относительного скольжения деформируемого материала по поверхности инструмента, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_\tau - \vec{v}_\tau^*$; $\vec{v}_\tau$ — скорость течения на поверхности S_τ, $\vec{v}_\tau = \vec{v}(D)|_{S_\tau}$.

Возможен вариант, при котором на поверхности $S_{\tau_1} \in S_\tau$ либо на всей поверхности S_τ задано кинематическое граничное условие, отвечающее прилипанию деформируемой среды к инструменту:

$$\vec{v}_\tau - \vec{v}_\tau^* = 0. \tag{2.21}$$

В этом случае поверхность S_{τ_1} практически идентична поверхности S_v; разница состоит в том, что для поверхности S_{τ_1} на величину $\vec{\sigma}_n$ не накладываются исходные динамические ограничения. Поиск геометрических параметров поверхности S_{τ_1} — зоны прилипания как части контактной поверхности — может быть одной из целей решения задачи, однако пока ограничимся допущением о том, что вся поверхность S_τ — это поверхность, на которой справедливо граничное условие (2.20). При этом закон $\tau^* = \tau^*(S_\tau)$ может быть задан таким образом, что им будут предопределяться как наличие, так и размеры зоны прилипания S_{τ_1} на поверхности S_τ.

Термодинамические граничные условия. В общем случае решение краевой задачи теплопроводности включает как определение поля температур, так и определение полей скоростей и напряжений. Краевая задача теплопроводности является связанной и может быть решена лишь в системе уравнений (2.12).

Точное решение краевой задачи теплопроводности связано с непреодолимыми математическими трудностями. В литературе имеется ряд частных решений [5, 6], в которых на основе гипотезы о неподвижности среды в подобласти D решены некоторые важные прикладные задачи о теплообмене в конкретных процессах ОМД. При этом достигнута весьма удовлетворительная с практической точки зрения точность расчетов, что позволяет оправданно принять следующие допущения о характере теплообмена между W, W_1, W_2.

1. Начальное распределение температур в рассматриваемых областях равномерное:

$$\left.\begin{aligned} \theta_W(\vec{x},\ 0) &= \theta^0_{W^*} = \text{const};\\ \theta_{W_1}(\vec{x},\ 0) &= \theta^0_{W_1^*} = \text{const};\\ \theta_{W_2}(\vec{x},\ 0) &= \theta^0_{W_2^*} = \text{const}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

где $\theta^0_{W^*}$, $\theta^0_{W_1^*}$, $\theta^0_{W_2^*}$ — начальные усредненные значения температур среды в областях W, W_1, W_2 соответственно.

2. Теплообмен на поверхности S_τ (между $D \in W$ и W_1) отвечает условиям теплообмена двух полупространств при наличии теплового сопротивления и потока диссипации работы напряжений контактного трения.

С учетом сделанных допущений можно рассматривать задачу определения поля температур как задачу с граничными условиями третьего рода [7].

Математическая запись граничного условия в «разностной» форме для поверхности S_τ принимает вид уравнения

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\overline{n}}\right|_{S_\tau} - \tilde{h}^*\,[\theta_c' - \theta(S_\tau)] = 0, \qquad (2.23)$$

где n — ось, перпендикулярная к S_τ с положительным направлением из S_τ в W; $\tilde{h}^*$ — относительный коэффициент теплообмена между D и W_1, $\tilde{h}^* = \dfrac{\alpha^*_a\,(\tilde{b}^*_0 + \tilde{b}^*_1)}{k_{t_0}\tilde{b}^*_1}$; $\tilde{b}^*_j$ — коэффициент тепловой активности области ($j = 0$ для $D \in W$; $j = 1$ для W_1), $\tilde{b}^*_j = \sqrt{(c^*_V \rho^* k^*_t)_j}$; θ_1' — условная температура в W_1, $\theta_1' = \theta^*_1 + q_\tau \dfrac{\tilde{b}^*_0}{\alpha^*_a\,(\tilde{b}^*_0 + \tilde{b}^*_1)}$; θ^*_1 — условная температура в W_1 при отсутствии потока диссипации работы напряжений контактного трения, $\theta^*_1 = \dfrac{\theta^0_{W^*}\tilde{b}^*_0 + \theta^0_{W_1^*}\tilde{b}^*_1}{\tilde{b}^*_0 + \tilde{b}^*_1}$; q_τ — плотность потока диссипации работы напряжений контактного трения, $q_\tau = \tau\Delta v G$.

Если решение допускает возможность пренебрежения тепловым сопротивлением на S_τ и тепловыделением от q_τ, то, используя граничное условие первого рода, получаем

$$\theta|_{S_\tau} - \theta^0_{W_1^*} + \frac{(\theta^0_{W^*} - \theta^0_{W_1^*})\,\tilde{b}^*_0}{\tilde{b}^*_0 + \tilde{b}^*_1} = 0. \qquad (2.24)$$

Для свободной поверхности $\Sigma = S_\sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$ будем считать справедливым допущение о том, что теплообмен с окружающей средой описывается законом Стефана — Больцмана

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_\Sigma - \frac{\varepsilon_ч^*\sigma_ч^*}{k_{t_0}^*}[\theta_2^4 - \theta_0^4(\Sigma)] = 0, \qquad (2.25)$$

где $\varepsilon_ч^*$ — степень черноты поверхности; $\sigma_ч^*$ — излучение абсолютно черного тела; θ_0, θ_2 — температура (К) соответственно материала (W) на Σ и окружающей среды в W_2.

В реальных условиях обычно $\theta_2 \approx \text{const}$, а относительное изменение $\theta_0(\Sigma)$ весьма незначительно, что позволяет использовать вместо (2.25) граничное условие вида

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_\Sigma - h_l^*[\theta_{W_2^*}^0 - \theta(\Sigma)] = 0, \qquad (2.26)$$

где h_l^* — относительный коэффициент лучистого теплообмена, $h_l^* = \frac{\varepsilon_ч^*\sigma_ч^*}{k_{t_0}}[(\theta_0^0)^* + (\theta_2^0)^*]\{[(\theta_0^0)^*]^2 + [(\theta_2^0)^*]^2\}$; $(\theta_0^0)^*$, $(\theta_2^0)^*$ — усредненные начальные температуры (К) соответственно в W и W_2.

Таким образом, определены все граничные условия, накладывающие ограничения на величину и характер изменения динамических, кинематических и температурных параметров процесса ОМД. Механические граничные условия (2.13), (2.15), (2.19), (2.21) связывают исключительно кинематические параметры и являются однородными. Механические граничные условия (2.14), (2.16), (2.18), (2.20) связывают кинематические, динамические и, в общем случае, температурные параметры и являются неоднородными. Температурные граничные условия (2.24)—(2.26) однородны, поскольку связывают лишь температуру и теплофизические константы; граничное условие (2.23) неоднородно, так как величина q_τ зависит от кинематических и динамических параметров процесса.

3. Законы теории ОМД

Законы связи $T = T(H, \Lambda, \theta)$. Сопротивление металлов пластическому формоизменению определяется широкой гаммой физических процессов, сопровождающих деформацию [8]. Характеристикой сопротивления материала пластической деформации может служить интенсивность сдвиговых напряжений T, при которой осуществляется процесс. В общем случае интенсивность T как параметр отклика зависит от целого ряда определяющих параметров процесса: температуры θ, степени деформации (мерой которой может служить степень деформации

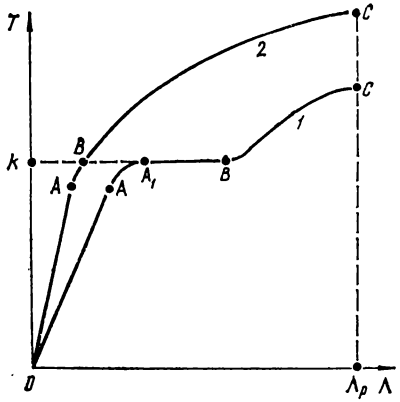

Рис. 7. Зависимость интенсивности сдвиговых напряжений от параметров Одквиста с наличием площадки текучести (*1*) и без нее (*2*):

OA — участок упругой деформации; *AB* — участок текучести; *BC* — участок упрочнения; A_1B — площадка текучести

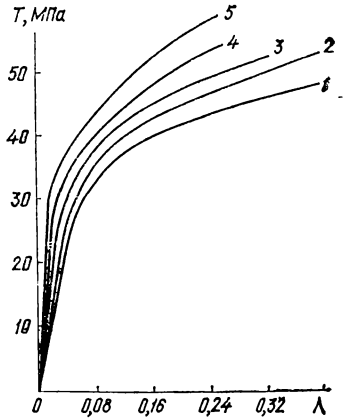

Рис. 8. Зависимость интенсивности сдвиговых напряжений от параметра Одквиста при интенсивности H скоростей сдвиговых деформаций:

1 — $4 \cdot 10^{-2}$; *2* — $7 \cdot 10^{-2}$; *3* — 4; *4* — 30; *5* — 10^3 $с^{-1}$

сдвига Λ), скорости деформации (мерой которой может служить интенсивность H), физико-химической структуры и компонентного состава деформируемого материала, времени деформации, формы деформируемого тела, давления окружающей среды, наложения на область пластического течения электромагнитных, магнитных полей, ультразвуковых колебаний, жесткого нейтронного облучения и др. [8—10].

Для большинства металлов, подвергающихся пластической деформации в промышленных масштабах, характерны два основных типа зависимости T — Λ: кривые с ярко выраженной площадкой текучести и без таковой (рис. 7). В интересующем нас плане математическая модель зависимости T от параметров процесса должна отражать влияние последних как на текущее значение интенсивности T (сдвиговое *напряжение* текучести), так и на величину k (сдвиговый *предел* текучести).

Для конкретного материала при фиксированном значении θ на характер связи T — Λ существенно влияет скорость деформации, которая влияет и на предел текучести k. Сказанное иллюстрируется (рис. 8, 9) конкретными зависимостями $T = T(\Lambda, H)$ и $k = k(H)$ для алюминия, построенными по экспериментальным данным работы [11]. Особенно чувствительны к скорости деформации значения k у металлов с ярко выраженной площадкой текучести. Так, например, для углеродистой стали (0,22 % С) предел текучести растет

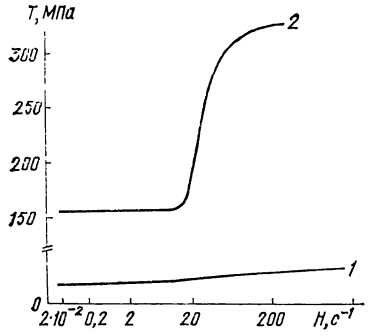

Рис. 9. Зависимость интенсивности сдвиговых напряжений от интенсивности скоростей сдвиговых деформаций для алюминия (*1*) и малоуглеродистой стали (*2*)

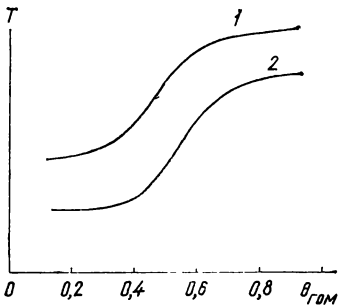

Рис. 10. Зависимость интенсивности сдвиговых напряжений от гомологической температуры:

$1 - \frac{H_2}{H_0} = \bar{H}_2 > \bar{H}_1$; $2 - \frac{H_1}{H_0} = \bar{H}_1 > 1$

от $\sigma_т = 276$ МПа при статических испытаниях до $\sigma_т = 587$ МПа при скорости деформации порядка 200 $с^{-1}$ [12].

Вопрос о влиянии скорости деформации на сопротивление деформации необходимо рассматривать в комплексе с температурными условиями процесса. Целым рядом исследований [13, 14] установлено, что интенсивность влияния H на T незначительна при гомологической температуре ниже 0,4 и резко возрастает при гомологических температурах порядка 0,5—0,8 (рис. 10).

Для учета влияния H на сопротивление деформации иногда используют скоростные коэффициенты, которые позволяют ориентировочно рассчитать T при данной скорости деформации, если оно известно при другой. Значения скоростных коэффициентов, по С. И. Губкину [15], приведены в табл. 1.

Определив значение скоростного коэффициента Z по данным табл. 1, сдвиговое напряжение текучести T_1 при интенсивности скоростей сдвиговых деформаций H_1 можно оценить

Таблица 1. **Влияние скорости деформации и гомологической температуры на скоростной коэффициент Z**

Изменение скорости деформации	Гомологическая температура			
	Менее 0,3	0,3—0,5	0,5—0,7	Более 0,7
В 10 раз	1,05—1,10	1,10—1,15	1,15—1,30	1,30—1,50
В 100 раз	1,10—1,22	1,22—1,32	1,32—1,70	1,70—2,25
В 1000 раз	1,16—1,34	1,34—2,52	1,52—2,20	2,20—3,40
От статической скорости 10^{-1} $с^{-1}$ к динамическому воздействию сил	1,10—1,25	1,25—1,75	1,75—2,50	2,50—3,50

в соответствии с соотношением $T_1 = ZT_0$, где T_0 — сдвиговое напряжение текучести при интенсивности $H_0 < H_1$. Такой подход к определению T как функции H может быть использован при изучении свойств чистых металлов в интервале скоростей деформации порядка 10^{-1}— 10^3. Связь T — — H — θ для сплавов бывает значительно сложнее, что иллюстрируется приведенной на рис. 11 зависимостью $Z(\theta)$ для углеродистой стали (0,11 %C; 0,32 % Mn; 0,1 % Cr; 0,25% Ni) при $H = 10^2 H_0$ и $H_0 = 1{,}4 \div 2{,}0$ $с^{-1}$.

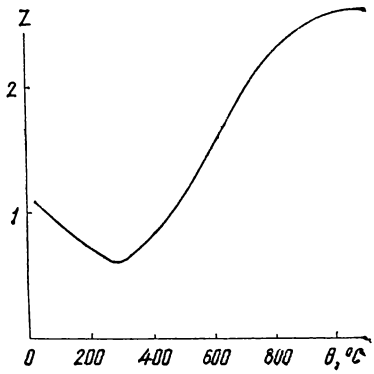

Рис. 11. Зависимость скоростного коэффициента от температуры

Для математического описания связи T и k с определяющими параметрами формоизменения прибегают к идеализации деформируемой среды как материального континуума. Основные гипотезы идеализации заключаются в следующих допущениях: вещество равномерно и непрерывно заполняет весь объем тела, ограниченный его контуром Σ; во всех точках $A(\vec{x}) \in W$ вещество обладает одинаковыми свойствами (вещество однородно); свойства вещества одинаковы во всех направлениях (вещество изотропно); сопротивление деформации не зависит от гидростатического давления, формы тела, схемы деформированного и напряженного состояний, а также протекающих во времени разупрочняющих и других физико-химических процессов.

При допущении о справедливости выдвинутых гипотез задача математического моделирования механических свойств деформируемого материала сводится к установлению вида и количественных характеристик зависимостей T и k от определяющих параметров Λ, H, θ, $b_к$ (здесь $b_к$ — параметр, характеризующий физико-химические свойства материала), причем зависимости, полученные для образца конкретной формы в конкретных деформационных условиях, должны быть справедливы для тела любой формы независимо от схемы деформированного и напряженного состояний, при которых протекает процесс.

В силу ранее принятых допущений процесс деформации рассматривается как склерономный; величина же $\Lambda = \int H dt$ в своем математическом описании явно зависит от времени.

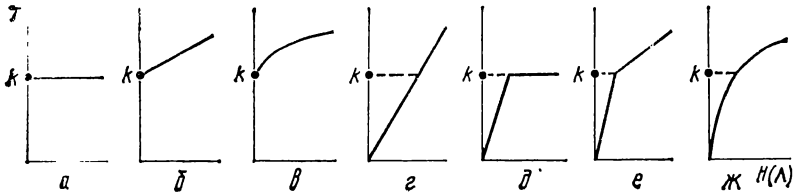

Рис. 12. Основные виды математических моделей связей $T - H$ и $T - \Lambda$ сплошной среды:

а — идеально жесткопластическая среда; *б* — жесткопластическая среда с линейным упрочнением (тело Бингама); *в* — жесткопластическая среда с нелинейным упрочнением; *г* — линейно вязкая упругопластическая среда; *д* — идеально упругопластическая среда; *е* — упругопластическая среда с линейным упрочнением по различным законам (билинейная упругопластическая среда); *ж* — упругопластическая среда с нелинейным упрочнением

Если решение конкретной задачи математического моделирования процесса ОМД позволяет ограничиться поэтапным расчетом, рассматривая на каждом этапе конечную, но небольшую деформацию ($\Lambda < 0{,}12 \div 0{,}15$), расчет ведут для фиксированных точек пространства; при этом координаты Эйлера и Лагранжа совпадают, поле $v = (\vec{v})$ склерономно, и можно считать, что $\Lambda = \Gamma = H\Delta t^*$, где Δt^* — заданный интервал времени деформации. Если же по условиям задачи необходимо рассматривать большие деформации, параметр Одквиста определится из выражения

$$\Lambda = \int_l H(\dot{v})\, v^{-1}\, dl, \qquad (2.27)$$

где l — траектория движения точки.

Таким образом, зависимость $T = T(H, \Lambda, \theta)$ всегда можно свести к склерономному виду $T(H, \theta, \Delta t^*)$ либо $T(H, \theta, \vec{x}, \vec{x}_0^*)$ (здесь $\vec{x}_0^*$ — радиус-вектор положения точки до деформации).

Идеализируя диаграммы T—H, T—Λ, в механике сплошной среды рассматривают несколько основных типов тел, свойства которых характеризуются видом указанной диаграммы. На рис. 12 приведены основные виды математических моделей $T = T(H)$; основные из используемых моделей связей $T = T(\Lambda)$ имеют абсолютно идентичный характер.

Для математического описания зависимости $T(H, \Lambda, \theta)$ наиболее широкое распространение получили уравнения степенного вида [16, 17]. В общем виде интересующую нас математическую модель можно представить в виде уравнения

$$T = b_1 H^{b_2} \Lambda^{b_3} \exp(b_4\theta) + b_5 k, \qquad (2.28)$$

Таблица 2. Значения коэффициентов $b_к$ для различных моделей деформируемой среды

Вид модели связи (обозначения рис. 12)	$b_к$			Примечание
	b_1	b_2	b_5	
а	0	—	1	
б	b_1^*	1	1	
в	b_1^*	b_2^*	1	
г	b_1^*	1	0	
д	b_1^*	1	0	$T < k$
	0	—	1	$T = k$
е	b_1^*	1	0	$T < k$
	b_1^*	1	b_5^*	$T \geqslant k$
ж	b_1^*	b_2^*	0	

где $b_к$ — эмпирические коэффициенты, характеризующие деформируемый материал, $b_к = b_к^*$, $к = \overline{1, 5}$.

Модель вида (2.28) охватывает всю гамму возможных идеализаций деформируемой среды, представленных на рис. 12. Так, например, для зависимостей T—H в (2.28) следует подставить $b_3 = b_3^*$; $b_4 = b_4^*$; $\theta = \theta^*$; $\Lambda = \Lambda^*$, а значения остальных коэффициентов определятся в зависимости от модели среды (табл. 2). Для моделей (рис. 12, *а*, *б*, *в*) величину сдвигового предела текучести задают в виде константы $k = k^*\theta$. Для моделей остальных типов величину k можно определить из (2.28) в соответствии с условием

$$k = b_1 H^{b_2} \Lambda_\varepsilon^{b_3} \exp(b_4\theta) + b_5 k,$$

из которого следует, что

$$k = b_6 H^{b_2} \Lambda_\varepsilon^{b_3} \exp(b_4\theta), \qquad (2.29)$$

где $b_6 = b_1 (1 - b_5)^{-1}$.

Для описания зависимости T —Λ любого идеализированного типа можно использовать (2.28), подставив $b_2 = b_2^*$, $b_4 = b_4^*$, $\theta = \theta^*$, $H = H^*$ и значения коэффициентов b_1, b_5 из табл. 2; при этом для b_3 используют значения коэффициента b_2. Строго говоря, коэффициенты $b_к$ являются функцией температуры [18], однако на практике их определяют в виде констант для некоторого интервала гомологических температур. Также не следует забывать, что значения эмпирических коэффициентов $b_к$ при постоянной температуре в значительной степени зависят от диапазона ΔH и $\Delta\Lambda$, в котором была сделана

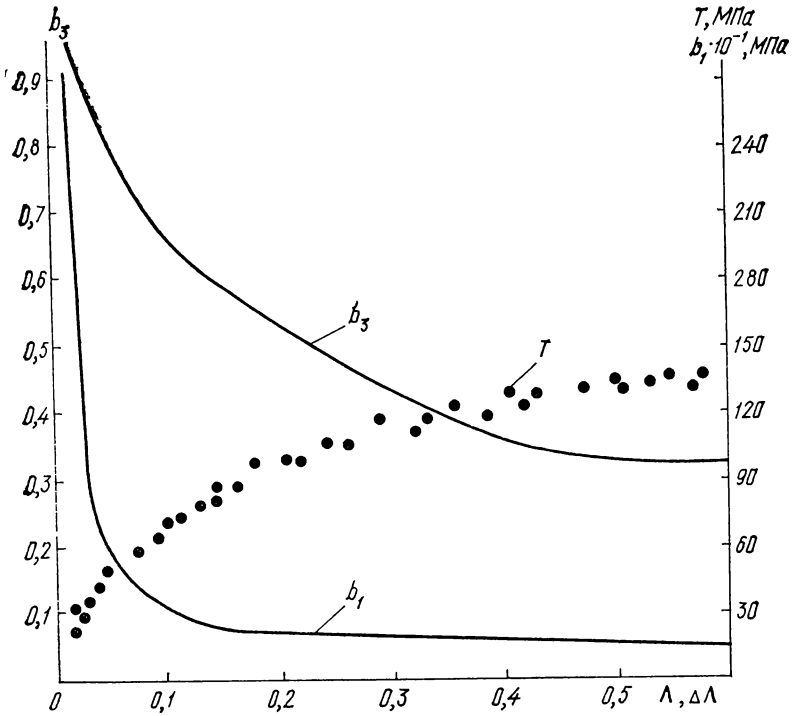

Рис. 13. Зависимости T от Λ и $b_к$ от $\Delta\Lambda$ для свинца при $\theta = 25°$ С, $H = 6 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$ (испытание на кручение)

выборка экспериментальных данных. Если, например, необходимо получить численные значения коэффициентов b_1, b_3 для модели Холломона $T = b_1 \Lambda^{b_3}$ ($\theta = \text{const}$, $H = \text{const}$) и при этом производить обработку экспериментальных данных в интервале от $\Lambda = 0$ до $\Lambda = \Lambda^*$, изменяя Λ^*, получим зависимость $b_к(\Lambda^*)$, аналогичную представленной на рис. 13. При малых $\Delta\Lambda = \Lambda^*$, соответствующих участку OA диаграммы T—Λ (см. рис. 7), значения b_1 будут стремиться к величине модуля сдвига G, а величина b_3 будет близка к единице. По мере увеличения Λ^* значения b_1, b_3 уменьшаются. На практике довольно часто рассматривают интервал $\Delta\Lambda = \Lambda_р$; при этом заметим, что снижение температуры уменьшает $\Lambda_р$, в связи с чем значения коэффициента b_3, вычисленные для этого интервала, возрастают по мере перехода от более высоких к более низким температурам ОМД.

Наиболее близкой к реальным свойствам многих металлов является модель упругопластической среды с нелинейным

упрочнением, однако при создании аналитических математических моделей процессов ОМД наиболее часто используют модели идеально жесткопластической среды и линейно вязкой упругопластической среды, что обусловлено их простым математическим описанием.

Математическая модель упругопластической среды с нелинейным упрочнением описывается уравнением вида

$$T = b_1 H^{b_2} \Lambda^{b_3} \exp(b_4 \theta), \tag{2.30}$$

которое с учетом изложенных выше соображений можно привести к склерономной зависимости

$$T = B_1 H^{b_7}, \tag{2.31}$$

где $B_1 = b_1 \Delta t_*^{b_3} \exp(b_4 \theta^*)$; $b_7 = b_2 + b_3$, $\theta^* = \text{const}$.

Зависимость (2.31) весьма точно (как правило, с ошибкой $\delta_0 < 8$ %) описывает механические свойства многих металлов (особенно тех, у которых отсутствует ярко выраженная площадка текучести); техника определения коэффициентов $b_к$ относительно проста [16, 17]. Однако во многих случаях при аналитическом моделировании процессов ОМД целесообразно использовать более простые по описанию модели: идеально жесткопластической среды

$$T = k \tag{2.32}$$

и линейно вязкой упругопластической среды

$$T = \mu H, \tag{2.33}$$

где величины k и μ являются константами.

Для изотермического процесса формоизменения значения k и μ соответственно для моделей вида (2.32) и (2.33) можно определить по методу наименьших квадратов, используя в качестве аппроксимируемой функцию (2.31). При таком подходе получим

$$k = \frac{B_1 \Delta H_*^{b_7}}{b+1}; \tag{2.34}$$

$$\mu = \frac{3 B_1 \Delta H_*^{b_7 - 1}}{b_7 + 2}, \tag{2.35}$$

где ΔH_* — заданный интервал значений H, в котором аппроксимируется зависимость (2.31).

Точность аппроксимации оценим интегральным квадратичным отклонением, которое для модели (2.32) составит величину

$$S_k^2 = \frac{B_1^2 b_7^2 \Delta H_*^{2b_7+1}}{(2b_7+1)(b_7+1)^2}, \tag{2.36}$$

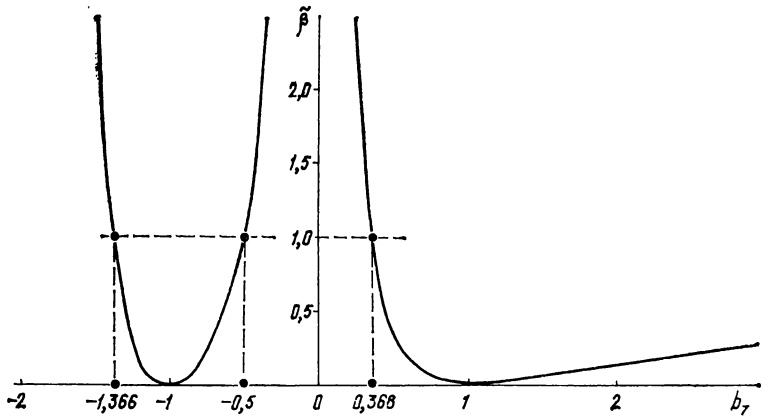

Рис. 14. Графическая интерпретация уравнения (2.39)

а для модели (2.33)

$$S_{\mu}^{2} = \frac{B_1^2 (b_7 - 1)^2 \Delta H_*^{2b_7+1}}{(2b_7 + 1)(b_7 + 2)^2}. \qquad (2.37)$$

Представляет реальный практический интерес сравнение точности аппроксимации зависимости (2.31) уравнениями (2.32) и (2.33). Рассмотрим отношение

$$\tilde{\beta} = \frac{S_{\mu}^{2}}{S_{k}^{2}}. \qquad (2.38)$$

Очевидно, что при $\tilde{\beta} < 1$ аппроксимация уравнением (2.33) предпочтительна как более точная; при $\tilde{\beta} > 1$, наоборот, более точна аппроксимация уравнением (2.32). На рис. 14 приведена зависимость

$$\tilde{\beta}(b_7) = \frac{(b_7^2 - 1)^2}{b_7^2 (b_7 + 2)^2}. \qquad (2.39)$$

Критическое значение коэффициента $b_7 = b_{кр}$, отвечающее условию $\tilde{\beta} = 1$, определится из уравнения

$$b_{кр}^3 + 1{,}5 b_{кр}^2 - 0{,}25 = 0. \qquad (2.40)$$

Уравнение (2.40) имеет три действительных корня: $b_{кр}^{(1)} = -1{,}366$; $b_{кр}^{(2)} = -0{,}500$; $b_{кр}^{(3)} = 0{,}366$. Реальные металлы идеализируют как материалы с «мягкой» характеристикой, и значения коэффициентов b_2, b_3 лежат в пределах $0 < b_2 \leqslant 1$;

Таблица 3. **Значения коэффициента b_7 для некоторых материалов**

Материал	b_7	Примечание
Сталь		
низкоуглеродистая	0,45—0,60	При температурах горячей деформации
углеродистая	0,38—0,45	
нержавеющая	0,32—0,37	
жаропрочная	0,40—0,52	
инструментальная углеродистая	0,33—0,41	
инструментальная легированная	0,19—0,27	
углеродистая	0,55—0,80	
		При температурах холодной деформации
Алюминий	0,26—0,31	$\theta = 10 \div 50$ °C
Свинец	0,29—0,41	$\theta = 900 \div 1150$ °C
Белый чугун	0,48—0,61	$\theta = -20 \div 40$ °C
Пластилин	0,15—0,22	

$0 < b_3 \leqslant 1$. Исходя из этого, величина коэффициента b_7 может лежать в пределах $0 < b_7 \leqslant 2$ и из трех значений $b_{кр}$ реально возможной является величина $b_{кр} = 0{,}366$. При $b_7 < 0{,}366$ целесообразно идеализировать деформируемую среду как идеально жесткопластическое тело, при $b_7 > 0{,}366$ — как линейно вязкий упругопластический материал. В табл. 3 приведены значения коэффициента b_7 для некоторых материалов, полученные в интервалах $H = (10^{-2} \div 10^{+3})\ c^{-1}$, $\Lambda = 0{,}02 \div \Lambda_p$.

Интересно отметить, что для многих металлов значение коэффициета b_7 относительно близко к критической величине $b_{кр}$. Этим можно объяснить тот факт, что использование как модели (2.32), так и модели (2.33) в аналитических выкладках довольно часто дает практически идентичные по точности определения параметров процесса деформации результаты.

Законы внешнего трения описывают распределение касательных к поверхности S_τ напряжений τ в виде функции $\tau = \tau(S_\tau)$. Напряжения τ называют напряжениями контактного трения; они возникают как реакция на смещающее воздействие и, препятствуя взаимному скольжению деформируемого материала и инструмента, направлены противоположно вектору относительного скольжения $\vec{\Delta v}$. В том случае, когда τ достигает величин, достаточных для предотвращения взаимного скольжения областей D и W_1 по поверхности S_τ, на последней имеют место напряжения контактного трения покоя; при $\vec{\Delta v} \neq 0$ на S_τ действуют напряжения контактного трения скольжения.

Контактное трение в процессах ОМД характеризуется целым рядом отличительных особенностей, обусловленных спецификой взаимодействия инструмента и заготовки: пластическое течение материала одной из контактирующих поверхностей; весьма тесный контакт трущихся поверхностей и сжатие их весьма значительными нормальными поверхностными напряжениями p; обновление поверхности одного из контактирующих тел за счет выхода на поверхность S_τ частиц, расположенных первоначально в объеме области D; наличие в области контакта «промежуточных» сред (окалина, смазка как в твердом, так и в жидком состоянии и т. д.); возможность одновременного наличия на S_τ областей скольжения ($\Delta\vec{v} \neq 0$) и прилипания ($\Delta\vec{v} = 0$); весьма высокая температура материала в области D (при процессах ОМД в горячем состоянии); ярко выраженная (в некоторых случаях) анизотропия трения.

В общем случае при ОМД τ зависит от группы факторов, предопределяющих развитие механического зацепления и адгезии. Имеется целый ряд исследований, в которых сделана попытка вывести зависимость τ в функции факторов упомянутых групп дифференцированно. При этом зависимости для определения τ включают как параметры процесса (нормальное контактное давление p, напряжение текучести деформируемого материала σ_s и т. д.), так и эмпирические коэффициенты, характеризующие в отдельности адгезию и механическое зацепление. В то же время в теории ОМД весьма широко используются интегральные характеристики-показатели условий контактного взаимодействия. Их применение позволяет определить τ как функцию параметров процесса и одного эмпирического коэффициента, интегрально характеризующего контактное взаимодействие в известных условиях (температура, наличие промежуточных сред на контакте, высота микронеровностей на поверхностях инструмента и заготовки и т. д.). Использование интегральных характеристик трения несколько вуалирует суть физических процессов, имеющих место в зоне контактного взаимодействия, но значительно упрощает аналитическое изучение деформирования, и поэтому они повсеместно используются в практике расчета параметров ОМД в виде усредненных для контактной поверхности значений [19]. Кроме того, следует отметить, что техника эмпирического определения интегральных характеристик контактного трения значительно проще, чем техника определения дифференциальных характеристик.

В аналитических выкладках теории ОМД наиболее широко используют закон трения следующего вида:

$$\tau = \text{ИФ}, \tag{2.41}$$

где И — интегральная характеристика условий контактного взаимодействия, Ф — функция механических характеристик деформируемого материала, кинематики его течения, кинематики течения смазки, геометрических параметров области пластического течения и т. д.

На практике используют несколько основных видов зависимости (2.41), причем выбор вида этой зависимости в первую очередь определяется особенностями конкретного процесса ОМД в плане условий контактного взаимодействия. При ОМД контактное трение отвечает условиям одного из трех приведенных ниже видов взаимодействия.

1. *Сухое трение*, имеющее место при взаимном скольжении чистых, не разделенных промежуточными прослойками поверхностей. В чистом виде такой режим контактного взаимодействия встречается редко: при ОМД в глубоком вакууме и инертных средах. Силовой режим деформации в данных условиях характеризуется наличием обширных зон прилипания, в которых значения напряжений внешнего трения достигают максимально возможных величин:

$$\tau = T(D)\,|_{S_\tau}.$$

2. *Жидкостное* (*гидродинамическое*) *трение* обычно возникает при ОМД в холодном состоянии с подачей смазки в очаг деформации (при ОМД в горячем состоянии этот режим трения встречается значительно реже). При жидкостном трении контактирующие поверхности разделены слоем смазки, достаточным для того, чтобы последняя сохраняла свойства жидкости (реально толщина слоя смазки должна быть более 0,1—0,5 мкм в случае контакта гладких поверхностей). Для этого вида контактного взаимодействия напряжение внешнего трения может быть определено по уравнению Ньютона—Петрова

$$\vec{\tau} = -\mu \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta},$$

которое удовлетворяет уравнениям Рейнольдса для вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии градиента давления в объеме смазки (grad $p = 0$). Реально в объеме смазки имеет место значительный перепад давлений, особенно в направлении $\vec{e}_\tau$, поэтому значения τ, определенные с помощью формулы Ньютона— Петрова, можно рассматривать как весьма приближенные.

3. *Граничное трение* весьма широко встречается в реальных процессах ОМД. Данный режим характеризуется наличием на поверхности контакта тонких (как правило, менее 0,1 мкм)

промежуточных слоев в виде окисных пленок, пленок смазок, эмульсий, конденсатов атмосферной влаги и т. д.

В большинстве случаев при аналитическом изучении процессов ОМД закон (2.41) представляют в виде произведения $И = \text{const}$ на характеристику механических свойств или функцию от характеристики механических свойств деформируемого материала.

Наиболее широко используются следующие законы внешнего трения:

закон Амонтона — Кулона

$$\tau = fp\,(S_\tau); \tag{2.42}$$

закон (условие) Э. Зибеля

$$\bar{\tau} = f_\sigma \bar{\sigma}_s, \tag{2.43}$$

где $\bar{\tau}$ — усредненное по S_τ напряжение контактного трения; f_σ — показатель трения Зибеля; $\bar{\sigma}_s$ — усредненное по D значение напряжения текучести (частным случаем закона Э. Зибеля является закон Л. Прандтля, в котором $f_\sigma = 0{,}5$);

закон, предложенный в работе [26]:

$$\bar{\tau} = f_{\bar{\tau}} \bar{T}_{к0}, \tag{2.44}$$

где $f_{\bar{\tau}}$ — показатель трения; $\bar{T}_{к0}$ — усредненное по S_τ значение сдвигового напряжения текучести деформируемого материала.

Значения коэффициента (показателя) трения в законах (2.42)—(2.44), как правило, имеют вид констант, значения которых зависят от конкретных условий процесса ОМД (температуры, скорости, наличия смазки и т. д.). При такой интерпретации законов (2.42)—(2.44) им присущ общий недостаток, который состоит в существенном расхождении экспериментальных и расчетных эпюр τ как в количественном, так и в качественном отношении. Зачастую используемые коэффициенты трения вообще лишены своего первоначального физического смысла и, по сути, являются коэффициентами приведения в соответствие той или иной математической модели и реального процесса по какому-либо параметру отклика (как правило, по полному усилию деформации) [20].

Для того чтобы избежать указанного недостатка, целым рядом исследователей предложены функции $\Phi\,(S_\tau)$, использование которых позволяет в конкретных условиях описать эпюру $\tau\,(S_\tau)$ зависимостью, близкой к экспериментальной

[21, 22]. Так, например, в работе [22] предложен закон внешнего трения в виде зависимости

$$\tau = f_n T_{к0} \times \times \left[1 - \exp\left(-\frac{1{,}25\sigma_n}{\sigma_{sк}}\right)\right], \quad (2.45)$$

где f_n — эмпирическая константа; $T_{к0} = T(D)|_{S_\tau}$; $\sigma_{sк} = \sqrt{3}\,T_{к0}$.

Основная сложность при использовании законов, аналогичных (2.45), состоит в определении эмпирических коэффициентов, что обусловлено отсутствием у этих коэффициентов физического смысла.

В работе [23] предложен закон внешнего трения вида

$$\tau = f_\tau T_{к0}. \quad (2.46)$$

Показатель трения $f_\tau = f_\tau(S_\tau)$, входящий в закон (2.46), в соответствии с уравнением Сен-Венана — Мизеса (2.9) имеет физический смысл и представляет собой функцию распределения соотношения $\dot{\gamma}_\tau(S_\tau)/H(S_\tau)$ по контактной поверхности (здесь $\dot{\gamma}_\tau$ — скорость сдвиговой деформации на контакте в направлении $\vec{e}_\tau$).

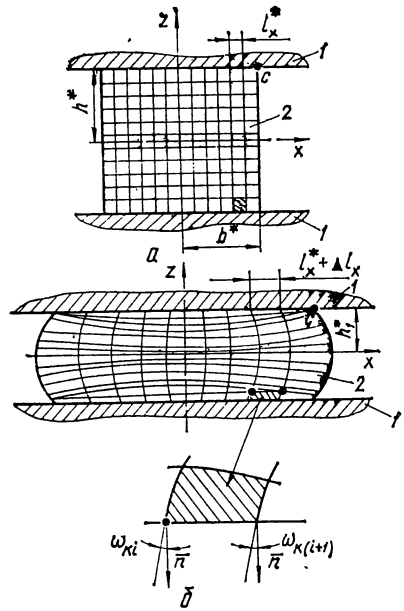

Рис. 15. Схема разреза по плоскости симметрии образца до деформации (*а*) и после деформации (*б*) с растровой сеткой:
1 — бойки; *2* — образец (h^*, h_1^* — высота образца соответственно до и после деформации)

Наличие у функции $f_\tau(S_\tau)$ физического смысла характеристики деформационных параметров процесса пластического формоизменения заготовки позволило предложить для ее экспериментального определения способ [24], суть которого можно проиллюстрировать на примере его использования при изучении плоской осадки прямоугольных образцов. До деформации образец разрезают по плоскости симметрии и наносят на него сетку в виде двух семейств ортогональных растровых линий, параллельных координатным осям x и z (рис. 15,*а*). После спайки (склейки) образец подвергают деформации, в результате чего растровые линии изменяют свою форму по отношению к первоначальной (рис. 15,*б*). При относительно небольших деформациях ($\ln h^*/h_1^* < 0{,}12 \div 0{,}15$) процесс деформации можно рассматривать как стационарный (квази-

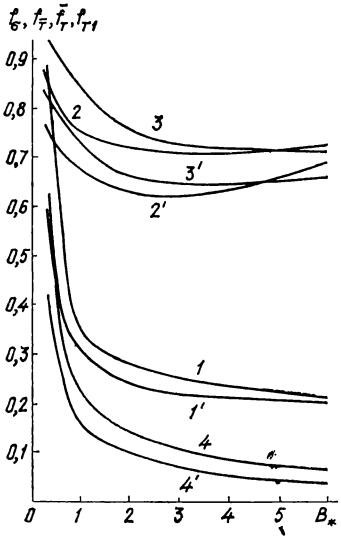

Рис. 16. Эмпирические зависимости показателей трения f_σ (*1*), $f_{\bar{\tau}}$ (*2*), $\bar{f}_\tau$ (*3*), $f_{\tau 1}$ (*4*) от показателей формы деформируемой полосы

Цифры без штриха соответствуют $\delta_* = 150 \div 200$ мкм, со штрихом — $\delta_* = 1{,}5 \div 2{,}0$ мкм

стационарный) [25], и для анализируемого примера справедливо соотношение

$$f_\tau = w_{к0}\,[4\Delta l^2_{xк0}\,(l^*_{xк0})^{-2} + w^2_{к0}]^{-0,5}, \qquad (2.47)$$

где $w_{к0}$ — среднее для данной ячейки сетки на S_τ значение угла поворота нормалей к контактной поверхности в результате деформации (рис. 15,*б*); $l^*_{xк0}$, $\Delta l^*_{xк0}$ — соответственно размер ячейки сетки на S_τ вдоль оси x до деформации и изменение данного размера этой же ячейки в результате деформации.

По своему физическому смыслу показатели трения f_σ и $f_{\bar{\tau}}$ могут быть определены как функция искажения геометрических размеров растровой сетки на контактной поверхности и распределения $T_{к0} = T\,(S_\tau)$ и $T = T\,(D)$, где T в соответствии с (2.27), (2.28) является функцией искажения геометрических размеров растровой сетки, скорости движения бойков $v^*_б$ и обжатия $\Delta h^* = h^* - h^*_1$:

$$f_\sigma = \frac{h^*}{\sqrt{3}}\left[\int_0^{b^*} f_\tau T_{к0}\,(b^*_к,\ \Lambda_{к0},\ \Delta t^*)\,dX\right] \times$$

$$\times \left[\int_0^{b^*}\int_0^{h^*} T\,(b^*_к,\ \Lambda,\ \Delta t^*)\,dX\,dZ\right]^{-1}; \qquad (2.48)$$

$$f_{\bar{\tau}} = \left[\int_0^{b^*} f_\tau T_{к0}\,(b^*_к,\ \Lambda_{к0},\ \Delta t^*)\,dX\right]\left[\int_0^{b^*} T_{к0}\,(b^*_к,\ \Lambda,\ \Delta t^*)\,dX\right]^{-1}, \qquad (2.49)$$

где

$$\Lambda_{к0} = \sqrt{4\Delta l^2_{xк0}\,(l^*_{xк0})^{-2} + w^2_{к0}};$$

$$\Lambda = \sqrt{4\Delta l^2_x\,(l^*_x)^{-2} + w^2_0};$$

$$\Delta l^* = \frac{\Delta H^*}{v^*_б};$$

l_τ^*, Δl_x, w_0 — соответственно исходный размер ячейки вдоль оси x, изменение размера и средний угол поворота той же ячейки; b^*, h^* — половина ширины и высоты заготовки.

Сравнение выражений (2.47)—(2.49) приводит к выводу, что экспериментальное определение показателя трения f_τ связано с наименьшим объемом обработки эмпирической информации. Значительно проще, чем f_σ и f_τ, определить и среднее по S_τ значение f_τ:

$$\bar{f}_\tau = \frac{1}{b^*} \int_0^{b^*} f_\tau \, dx. \qquad (2.50)$$

На рис. 16 приведены зависимости показателей трения f_σ, $f_{\bar{\tau}}$, $\bar{f}_\tau$ от показателя формы деформируемой полосы $B = b^* (h^*)^{-1}$ при деформации свинцовых образцов. Анализ результатов эксперимента позволяет сделать следующие выводы. Шероховатость бойков δ_* существенно влияет на значения показателей трения при деформации относительно высоких образцов ($B < 2 \div 3$); с увеличением B влияние δ_* на f_σ, $f_{\bar{\tau}}$, $\bar{f}_\tau$ уменьшается. Значения показателей $f_{\bar{\tau}}$ и $\bar{f}_\tau$ в исследованном диапазоне показателя формы B весьма близки друг к другу (относительная разность между показателями $f_{\bar{\tau}}$ и $\bar{f}_\tau$ не превышает 15 %).

На рис. 17 показаны истинные и расчетные эпюры напряжений контактного трения и эпюры изменения показателя трения f_τ по контактной поверхности. В расчетах в соответствии с графиком, представленным на рис. 13, использовали закон $T = 1{,}68\ \Lambda^{0{,}58}$ МПа; считая $\Delta\Lambda = 0{,}15$. Как следует, из приведенных данных, эпюры $\tau\ (S_\tau)$, полученные расчетным путем с использованием показателей трения f_σ, $f_{\bar{\tau}}$, $\bar{f}_\tau$, существенно отличаются от истинных эпюр напряжений контактного трения. В случае же использования обобщенного закона трения (2.46) и эмпирических значений $f_\tau(S_\tau)$, которые приведены на рис. 17, эмпирические и расчетные эпюры $\tau\ (S_\tau)$ совпадают. Для простоты использования в конкретных расчетах аппроксимируем зависимость $f_\tau\ (S_\tau)$ выражением

$$|f_\tau| = 1 + (f_{\tau 1} - 1)\left(\frac{|x|}{b^*}\right)^3. \qquad (2.51)$$

Величина $f_{\tau 1}$, входящая в уравнение (2.51) по физическому смыслу представляет собой отношение $\dot{\gamma}_\tau(c)/H\,(c)$ (т. е. показатель трения f_τ) в граничной точке контактной поверхности $c\,(b^*;\ h^*)$ (см. рис. 15). Эмпирическая зависимость

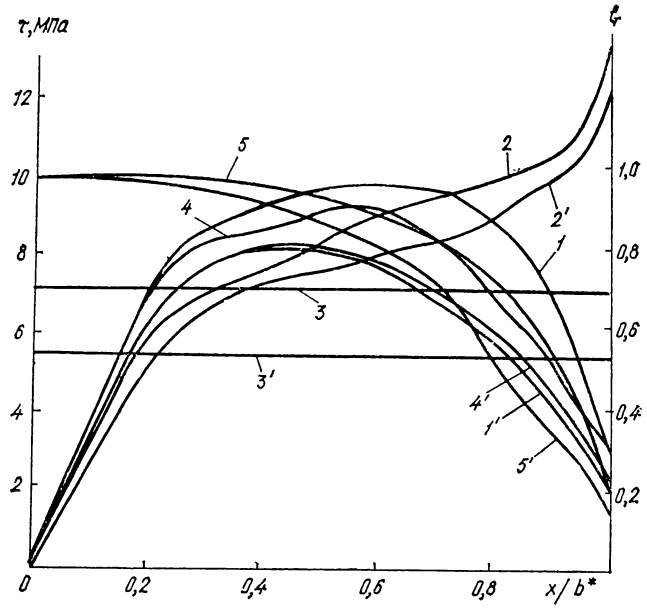

Рис. 17. Эмпирические и расчетные эпюры $\tau(S_\tau)$ и $f_\tau(S_\tau)$ для осадки образца с показателем формы $B_* = 1{,}0$:

1 — $\tau(S_\tau)$ — эксперимент; *2* — расчет по формуле $\tau = \overline{f}_\tau T_{к0}$; *3* — расчет по формулам (2.43), (2.44); *4* — расчет по формуле (2.46) с использованием (2.51), (2.52); *5* — $f_\tau(S_\tau)$ — эксперимент; цифры без штриха соответствуют $\delta_* = 150 \div 200$ мкм, со штрихом — $\delta_* = 1{,}5 \div 2{,}0$ мкм

$f_{\tau 1}(B_*, \delta_*)$ (см. рис. 16) может быть охарактеризована аппроксимирующим уравнением

$$f_{\tau 1} = 0{,}15\delta_*^{0{,}084} B_*^{-0{,}712}. \qquad (2.52)$$

На рис. 17 приведены расчетные эпюры τ, полученные при использовании в обобщенном законе трения (2.46) аппроксимирующих зависимостей (2.51), (2.52). Как следует из сопоставления эмпирических и расчетных эпюр напряжений контактного трения, полученные расчетные эпюры весьма точно отражают качественные и количественные особенности изменения τ по контактной поверхности.

Закон трения (2.46) может быть использован для всех вариантов контактного взаимодействия в процессах ОМД: в случае трения покоя (в зонах прилипания) $f_\tau = 1$, $\tau = T_{к0}$, в случае трения скольжения как с наличием смазки в зоне контакта, так и без смазки $f_\tau = f_\tau(S_\tau)$ в соответствии с эмпириче-

ской зависимостью $f_\tau = \tau_\tau(S_\tau)/H(S_\tau)$, определенной для данного конкретного случая деформирования.

Использование аппроксимирующих зависимостей типа (2.51), (2.52) сводит, в конечном счете, определение напряжений контактного трения к расчету параметра отклика τ как функции определяющих параметров процесса $\tilde{\delta}_*$, $\tilde{B}_*$ (здесь $\tilde{\delta}_*$, $\tilde{B}_*$ — обобщенные характеристики контактной поверхности и геометрических определяющих параметров) и параметра отклика $T_{к0}$. В случае использования допущения об идеальной пластичности материала ($T_{к0} = k^*$) искомое напряжение τ зависит только от конкретных, гранично заданных определяющих параметров процесса деформации.

Определение показателя трения f_τ как функции $\tilde{\delta}_*$, $\tilde{B}_*$ (и в общем случае, средней температуры заготовки θ_0^*), проще, чем, например, предложенное в работе [26] для случая осадки цилиндрических заготовок радиуса $R_ц^*$ условие

$$f_\tau = f + \frac{R_ц^*(1-f)\sqrt{f}}{16h^*}, \qquad (2.53)$$

так как входящий в (2.53) коэффициент трения f является параметром отклика и его определение как функции определяющих параметров процесса представляет собой дополнительную сложную задачу. Сказанное в полной мере относится и к закону (2.45), поскольку входящая в него величина $\sigma_п$ является параметром отклика и зависит от многих определяющих параметров процесса.

Для построения эпюры $\tau(S_\tau)$ конкретного технологического процесса ОМД с использованием показателя трения f_τ необходимо, во-первых, установить характер связи $f_\tau(S_\tau)$, во-вторых, выделить на эпюре f_τ некоторую характерную точку (точки) c_i и, в-третьих, установить закон связи показателя $f_\tau(c_i) = f_{\tau i}$ с определяющими параметрами процесса. Анализ многочисленных имеющихся в литературе экспериментальных данных [22, 26—29], а также результаты выполненных нами исследований позволяют сделать вывод о том, что основным видам ОМД присущи три характерные в качественном отношении эпюры распределения показателя трения по длине контактной поверхности (рис. 18).

1. Куполообразные эпюры $|f_\tau(\bar{x}_c)|$ (здесь $\bar{x}_c$ — координатная ось, совпадающая с направлением относительного скольжения металла и инструмента на S_τ). Эпюры такого типа имеют место в процессах осадки, ковки и прокатки при наличии зон прилипания на контакте. Характерной точкой куполообразной эпюры при ковке и осадке, как было показано выше, может служить граничная точка c (b^*; h^*) (рис. 18,*а*). При

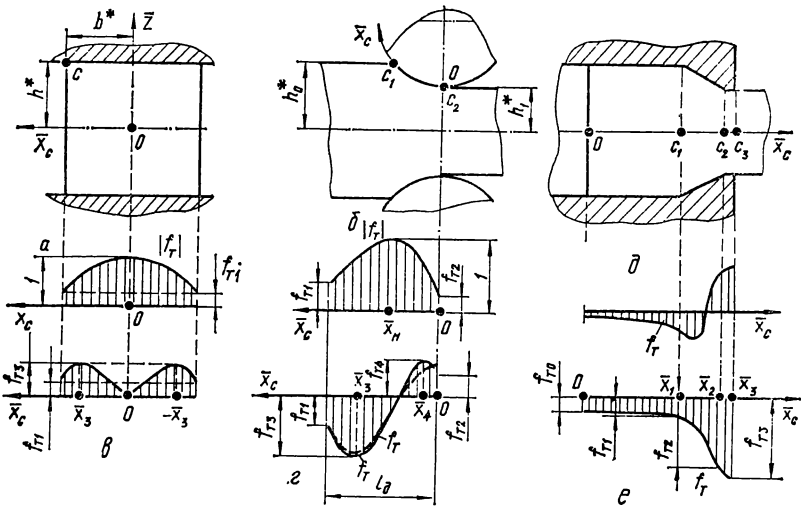

Рис. 18. Характерные эпюры $|f_т|$ и $f_т$

прокатке эпюра $|f_т|$ имеет две характерные точки: c_1, c_2 (рис. 18,*б*), которым соответствуют значения показателей трения $f_{т1}$, $f_{т2}$ соответственно на входе и выходе из очага деформации. Эта эпюра может быть аппроксимирована уравнением

$$|f_т| = f_{т2} + \left\{\frac{\Delta f_т + A_1 |x_н (2 - 3x_н) + x (2x_н - 1)|}{2x_н - 1}(x - 1) - \Delta f_т\right\} x. \tag{2.54}$$

Здесь $\Delta f_т = f_{т2} - f_{т1}$;

$$A_1 = \frac{(1 - f_{т2} + x_н \Delta f_т)(1 - 2x_н) + \Delta f_т x_н (x_н - 1)}{x_н^2 (1 - x_н)^2};$$

$$x_н = \bar{x}_н / l_д; \quad x = \bar{x} / l_д,$$

где $\bar{x}_н$ — координата максимума эпюры; $\bar{x}$ — текущее значение координаты на оси $\bar{x}_c$.

Значения показателей трения $f_{тi}$ $(i = \overline{1, 2})$ аналогично (2.52) можно задать аппроксимирующими уравнениями

$$f_{тi} = C_{1i} \tilde{\delta}_*^{C_{2i}} \tilde{B}_*^{C_{3i}} \theta_*^{C_{4i}}, \tag{2.55}$$

где $C_{\zeta i} = C_{\zeta i}^*$ — эмпирические коэффициенты, $\zeta = \overline{1, 4}$; $i = \overline{1, 2}$.

Как показывает анализ эмпирических данных, полученных при прокатке свинцовых образцов, рассматриваемые эпюры

$|f_т(\bar{x}_c)|$ наблюдаются при прокатке высоких полос с показателем формы $\tilde{B} = \frac{l_д}{h_0^* + h_1^*}$; при этом обычно соблюдается условие $f_{т1} > f_{т2}$, а величина $f_{т1}$ лежит в пределах $f_{т1} = 0{,}25 \div 0{,}60$ (табл. 4).

Таблица 4. Зависимость показателей трения $|f_{т1}|$, $|f_{т3}|$ от показателя формы $\tilde{B}$

$\tilde{B}$	$\|f_{т1}\|$	$\|f_{т3}\|$
0,3—0,5	0,25—0,60	1,0
1,0—2,0	0,15—0,20	0,5—0,8
2,0—5,0	0,05—0,15	0,3—0,5

При использовании в аналитических выкладках законов трения вида (2.46) с привлечением выражений (2.52), (2.55) напряжение внешнего трения с учетом его векториальности определится как

$$\vec{\tau} = (f_т T_{к0}) \vec{e}_\tau. \tag{2.56}$$

При осадке и ковке образцов без наличия зоны прилипания в центральной области контактной поверхности (рис. 18, *в*) эпюру $|f_т(\bar{x}_c)|$ следует рассматривать в соответствии с зависимостью

$$|f_т| = \left\{ f_{т1} - (1 - |x|) \frac{A_2 [x_3 (2 - x_3) + |x| (2x_3 - 1)] - f_{т1}}{2x_3 - 1} \right\} |x|. \tag{2.57}$$

где $x = \bar{x}/b^*$; $x_3 = \bar{x}_3/b^*$;

$$A_2 = \frac{(f_{т3} - x_3 f_{т1})(1 - 2x_3) + f_{т1} x_3 (1 - x_3)}{x_3^2 (1 - x_3)^2};$$

$f_{т3}$ — максимум эпюры; $\bar{x}_3$ — координата максимума эпюры.

Эпюры, соответствующие уравнению (2.57), наблюдаются при осадке тонких полос.

2. Куполообразные эпюры $f_т(\bar{x}_c)$, имеющие место при прокатке средних и тонких полос при отсутствии зоны прилипания на $S_т$ (рис. 18, *г*). Эпюры этого вида характеризуются двумя экстремумами ($f_{т3}$ и $f_{т4}$), которым соответствуют координаты $\bar{x}_3$ и $\bar{x}_4$ на $\bar{x}_c$. Реально величина $x_4 = \frac{\bar{x}_4}{l_д}$ невелика ($x_4 = 0{,}05 \div 0{,}2$), и упрощенно эпюру этого вида можно представить в виде кривой с одним экстремумом (пунктир на рис. 18, *г*), которая описывается выражением

$$f_т = f'_{т2} + \left\{ \frac{\Delta f_{т1} + A_3 [x_3 - (2 - 3x_3) + x (2x_3 - 1)]}{2x_3 - 1} \times \right.$$
$$\left. \times (x - 1) - \Delta f_{т1} \right\} x, \tag{2.58}$$

где

$$A_3 = \frac{(\Delta f_{т2} + x_3 \Delta f_{т1})(1 - 2x_3) + \Delta f_{т1} x_3 (x_3 - 1)}{x_3^2 (1 - x_3)^2};$$

x_3 — симплекс координаты экстремума эпюры в зоне отставания ($x_н < x$), $x_3 = \bar{x}_3 / l_д$; $\Delta f_{т1} = f'_{т2} - f_{т1}$; $\Delta f_{т2} = f_{т3} - f'_{т2}$; $f'_{т2} = 0{,}5\,(f_{т2} + f_{т3})$.

Реально наблюдаются следующие соотношения: $|f'_{т2}| \approx \approx |f_{т1}|$; $x_3 = 0{,}6 \div 0{,}8$; значения $|f_{т1}|$ и $|f_{т3}|$ для случая прокатки свинцовых образцов приведены в табл. 4.

Эпюры описываемого вида также встречаются при прессовании и гидроэкструзии с активным действием сил трения (рис. 18,*д*) [30].

3. Монотонные эпюры $\tau\,(x_c)$ характерные для процессов прессования и волочения (рис. 18,*е*). Эпюры этого вида характеризуются минимальным и максимальным значениями $f_т$ (соответственно $f_{т3}$ и $f_{т4}$), имеющими место в начале и конце зон контакта. Для описания монотонных эпюр $\tau\,(\bar{x}_c)$ можно использовать как степенные алгебраические уравнения, так и зависимости линейного вида. Так, например, для случая прессования свинца экспериментальные данные, приведенные в работе Ю. С. Сафарова и В. И. Гаращенко [31], можно аппроксимировать зависимостями

$$\left.\begin{aligned} f_т &= -0{,}17; \text{ при } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_1; \\ f_т &= -(0{,}17 + 0{,}52\tilde{x}); \text{ при } \bar{x}_1 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2.59)$$

где $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ — соответственно координаты начала и конца обжимного участка матрицы, считая за «нуль» плоскость пресштемпеля; $\tilde{x} = (x - 1)/(x_2 - 1)$; $x = \bar{x}/\bar{x}_1$; $x_2 = \bar{x}_2/\bar{x}_1$.

В отличие от зависимостей (2.51), (2.54), (2.57), выражения (2.58), (2.59) учитывают векториальность напряжений контактного трения.

Законы разрушения. Один из основных факторов, определяющих возможности интенсификации процессов ОМД,— способность деформируемого металла подвергаться пластическому формоизменению без разрушения и появления необратимых микродефектов, не поддающихся устранению последующей термообработкой. Современная теория ОМД располагает достаточно надежным математическим аппаратом прогнозирования разрушения металлов в ходе технологических процессов обработки, основанным на феноменологической теории разрушения, разработанной в исследованиях В. Л. Колмогорова, А. А. Богатова, В. А. Паршина и др. [32—34].

В основу интуитивной модели заложено предположение о том, что пластическое разрыхление металла, характеризу-

емое относительным остаточным изменением его объема $\mathfrak{E}$, пропорционально Λ в соответствии с соотношением

$$d\mathfrak{E} = \mathfrak{a}\, d\Lambda. \tag{2.60}$$

где $\mathfrak{a}$ — модуль пропорциональности, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\left(\sum_M \Pi_m\right)$; $\sum \Pi_m$ — комплекс термодинамических параметров, характеризующих условия формоизменения.

Моменту начала разрушения деформируемого металла t_p соответствует критическая степень его разрыхления

$$\mathfrak{E}_* = \int_0^{\Lambda_p} \mathfrak{a}\, d\Lambda. \tag{2.61}$$

Разделив почленно (2.60) на (2.61), получим

$$d\psi = (\mathfrak{a}\, d\Lambda)\left(\int_0^{\Lambda_p} \mathfrak{a}\, d\Lambda\right)^{-1}, \tag{2.62}$$

где $d\psi = d\mathfrak{E}/\mathfrak{E}_*$.

Текущее значение величины ψ, которую далее будем называть степенью использования ресурса пластичности, получаем из (2.62) в виде уравнения

$$\psi = \left(\int_0^{\Lambda} \mathfrak{a}\, d\Lambda\right)\left(\int_0^{\Lambda_p} \mathfrak{a}\, d\Lambda\right)^{-1}, \tag{2.63}$$

из которого следует, что при $\psi = 1$ ресурс пластичности полностью исчерпан и наступает разрушение деформируемого металла, так как $\Lambda = \Lambda_p$; при $\psi < 1$ металл не исчерпал ресурса пластичности и воспринимает формоизменение без образования макротрещин.

Для практического использования выражение (2.63) необходимо преобразовать; заменим интегралы в числителе и знаменателе (2.63) следующими выражениями

$$\int_0^{\Lambda} \mathfrak{a}\, d\Lambda = \bar{\mathfrak{a}}\,(\Lambda)\,\Lambda; \tag{2.64}$$

$$\int_0^{\Lambda_p} \mathfrak{a}\, d\Lambda = \bar{\mathfrak{a}}\,(\Lambda_p)\,\Lambda_p, \tag{2.65}$$

где $\bar{\mathfrak{a}}\,(\Lambda)$, $\bar{\mathfrak{a}}\,(\Lambda_p)$ — средние значения функции $\mathfrak{a}$ в интервалах $0 - \Lambda$ и $0 - \Lambda_p$ соответственно.

Подставив (2.64), (2.65) в (2.63), получим

$$\psi = \frac{\bar{a}(\Lambda)}{\bar{a}(\Lambda_p)} \frac{\Lambda}{\Lambda_p}. \qquad (2.66)$$

Учитывая, что $\Lambda = \int_{t_{01}}^{t} H(t)\,dt$, $\Lambda_p = \int_{t_0}^{t_p} H(t)\,dt$ (здесь t_{01}, t_0 — время начала деформации), преобразуем (2.66) к реономному виду

$$\psi = \frac{\bar{a}(t)}{\bar{a}(t_p)} \frac{1}{\Lambda_p} \int_{t_{01}}^{t} H(t)\,dt. \qquad (2.67)$$

Константа $\bar{a}(t_p)$ характеризует условия изменения модуля $a\left[\sum_M \Pi_m(t)\right]$ за время от начала деформации до разрушения образца при некоторых гранично заданных условиях формоизменения, описываемых конкретным комплексом параметров $\sum_M \Pi_m(t) = \sum_M \Pi_m^*(t)$. Иными словами, $\bar{a}(t_p)$ характеризует историю формоизменения до предельной деформации Λ_p за время $t_p - t_0$ при некотором стандартном испытании. Функция $\bar{a}(t)$ характеризует историю формоизменения, которая в общем случае неидентична стандартной: $\sum_M \Pi_m(t) = \sum_M \Pi_m^{**}(t) \neq \sum_M \Pi_m^*(t)$. При формоизменении в нестандартных условиях разрушение произойдет в момент t_{p_1} при деформации

$$\Lambda_{p_1} = \int_{t_{01}}^{t_{p_1}} H^{**}(t)\,dt. \qquad (2.68)$$

Предположим, что значение критического разрыхления $\mathfrak{E}_*$ является константой, характеризующей данный конкретный материал. Тогда выражение (2.67) для момента t_{p_1} принимает вид

$$\Lambda_p = \Phi(t_p, t_{p_1}) \int_{t_{01}}^{t_{p1}} H^{**}(t)\,dt, \qquad (2.69)$$

где $\Phi(t_p, t_{p_1}) = \dfrac{\bar{a}(t_{p1})}{\bar{a}(t_p)}$.

Далее допустим, что условия стандартного и нестандартного формоизменения характеризуются совокупностью

параметров $\sum_{M} \Pi^{*}_{m}(t)$ и $\sum_{M} \Pi^{**}_{m}(t)$, позволяющей использовать упрощение в виде равенства

$$\Phi(t_{\text{р}}, t_{\text{р}_1}) = 1 \text{ при}$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{M-N} \Pi^{*}_{m-n}(t_0 \leqslant t \leqslant t_{\text{р}}) = \sum\limits_{M-N} \Pi^{**}_{m-n}(t_{01} \leqslant t \leqslant t_{\text{р}1}); \\ \sum\limits_{N} \Pi^{*}_{n}(t_0 \leqslant t \leqslant t_{\text{р}}) \neq \sum\limits_{N} \Pi^{**}_{n}(t_{01} \leqslant t \leqslant t_{\text{р}1}). \end{cases} \tag{2.70}$$

Подставив (2.70) в (2.69), можно использовать полученное выражение для установления характера связи

$$\Lambda_{\text{р}} = \int_{t_{01}}^{t_{\text{р}1}} H^{**}(t)\, dt \tag{2.71}$$

при равных постоянных и изменяющихся во времени по одному и тому же закону параметрах $\sum_{M-N} \Pi^{**}_{m-n}$ и различных постоянных значениях, а также неидентичных законах изменения во времени параметров $\sum_{N} \Pi^{**}_{n}$.

Многочисленными исследованиями установлено, что на величину $\Lambda_{\text{р}}$ наиболее существенно влияют следующие параметры процесса деформации:

1) показатель жесткости напряженного состояния

$$\Pi_1 = \text{к}_{\text{ж}}(t) = \frac{\sigma_0}{T};$$

2) коэффициент Лодэ — Надаи

$$\Pi_2 = \mu_\sigma(t) = \frac{2(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3};$$

3) интенсивность скоростей сдвиговых деформаций $\Pi_3 = H(t)$;

4) температура $\Pi_4 = \theta(t)$.

Естественно, что получить «набор статистик», охватывающий все возможные фиксированные значения и законы изменения во времени четырех указанных параметров, практически невозможно. В связи с этим обычно ограничиваются несколькими испытаниями, отвечающими условиям монотонного изменения или постоянства во времени для каждого отдельного опыта параметров $\Pi_m (m = \overline{1,4})$. К наиболее распространенным видам испытаний относятся одноосное растяжение и сжатие, кручение, прокатка клиновидных образцов, прессование через коническую матрицу. В результате проведенных испытаний получают эмпирические данные, которые представляют

в виде графиков-номограмм либо аппроксимирующих уравнений; наиболее часто используют следующие зависимости [16, 35, 36]:

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda_p = \Lambda_p(\overline{\Pi}_1) \text{ при } \overline{\Pi}_{m-n}\ (m-n=\overline{2,\ 4}) = \text{const};\\
&\Lambda_p = \Lambda_p[\overline{\Pi}_n\ (n=1;\ 4)] \text{ при } \overline{\Pi}_{m-n}\ (m-n=2;\ 3) = \text{const};\\
&\Lambda_p = \Lambda_p[\overline{\Pi}_n\ (n=1;\ 2)] \text{ при } \overline{\Pi}_{m-n}\ (m-n=3;\ 4) = \text{const};\\
&\Lambda_p = \Lambda_p[\overline{\Pi}_n\ (n=1;\ 3;\ 4)] \text{ при } \overline{\Pi}_2 = \text{const};\\
&\Lambda_p = \Lambda_p(\overline{\Pi}_4) \text{ при } \overline{\Pi}_{m-n}\ (m-n=\overline{1,\ 3}) = \text{const},
\end{aligned}\right\} \tag{2.72}$$

где $\overline{\Pi}_{m-n}$, $\overline{\Pi}_n$ — средние значения параметров в опыте.

Подставив одну из эмпирических аппроксимирующих зависимостей (2.72) в (2.67), получим

$$\psi = \Phi_0 \psi_0, \tag{2.73}$$

где $\Phi_0 = \dfrac{\bar{a}(t)}{\bar{a}(t_p)}$; $\quad \psi_0 = \dfrac{1}{\Lambda_p(\overline{\Pi}_{m-n},\ \overline{\Pi}_n)} \int\limits_{t_{01}}^{t} H(t)\, dt.$

Поскольку допущения $\mathfrak{E}_* = \text{const}$ и $\Phi = 1$, использованные при получении зависимостей (2.72), упрощают реальную картину формоизменения, естественно, что значения ψ, получаемые по формуле (2.73), отличаются от реальных значений степени использования ресурса пластичности $\psi_т$ в конкретном технологическом процессе. Поэтому для определения $\psi_т$ используют зависимость, отличную от (2.73) и имеющую вид

$$\psi_т = \psi_т(\varphi,\ \psi_0,\ C), \tag{2.74}$$

где $\varphi = \varphi(t)$, C — соответственно эмпирические поправочные функции и постоянные коэффициенты.

Общую запись закона (2.74) можно представить в виде

$$\psi_т = \sum_{\varkappa=1}^{K} B_\varkappa \varphi_\varkappa \psi_{0\varkappa}^{C_\varkappa}, \tag{2.75}$$

где $\varkappa$, K — соответственно порядковый номер и общее число циклов деформации; $C_\varkappa \geqslant 1$ — эмпирический коэффициент, отражающий влияние немонотонности изменения параметров деформации; $\varphi_\varkappa$ — эмпирическая функция, учитывающая «восстановление» ресурса пластичности в паузах между циклами деформации ($\varphi_\varkappa \leqslant 1$); $B_\varkappa$ — функция реальных параметров деформирования, отражающая расхождение между $\psi_{0\varkappa}$ и $\psi_{т\varkappa}$ вследствие использования допущений ($\mathfrak{E}_* = \text{const}$, $\Phi = 1$) при получении зависимостей (2.72).

Окончательное условие пластического формоизменения материала без разрушения представляет собой неравенство

$$\psi_\tau < 1. \qquad (2.76)$$

Как показала практика конкретных исследований, для одноцикловых технологических процессов, характеризующихся близкими к монотонным изменениями параметров деформации, можно использовать условие $\psi_\tau \approx \psi_0$, в случае, если функция Λ_p получена при испытаниях, близких по условиям к реальному процессу. Так, например, по данным работы [32], при холодной деформации расхождение между ψ_τ и ψ_0 не превышает 10 %.

В заключение отметим, что в отличие от изложенной выше методики прогнозирования разрушения с помощью скалярных характеристик, в последние годы в ряде исследований [37—39] сделаны попытки привлечения энергетических и тензорных характеристик для решения указанной проблемы. Работы в этом направлении, несомненно, перспективны, однако в настоящее время объем выполненных исследований не позволяет сделать выводы о возможности широкого использования новых теорий разрушения в практике изучения процессов ОМД.

Глава третья

МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА ОМД

1. Основные определения

В предыдущей главе были приведены основные уравнения, описывающие поведение сплошной среды в условиях пластического течения. Эти уравнения можно рассматривать как интегральную математическую модель процесса ОМД, так как при их выводе использованы весьма общие допущения, приемлемые для практического анализа реальных процессов пластического формоизменения металлов.

В общем случае целью реализации математической модели процесса ОМД является определение полей скоростей течения, деформаций (перемещений), температур в формоизменяемой заготовке, а также анализ полученных данных для оптимизации процесса деформации по какому-либо из его параметров. Естественно, что определяемые аналитически поля исследуемых параметров процесса должны быть близки (в идеале — совпадать) с имеющими место в реальном процессе.

Сформулируем определения.

1. Поле скоростей течения $\vec{v} = (v_i)$, удовлетворяющее условию несжимаемости (2.12а) и однородным кинематическим граничным условиям (2.13), (2.15), (2.19), является кинематически возможным полем скоростей.

2. Поле шарового тензора σ_0 для произвольного поля скоростей и однородных температурных полей $\theta_W(\vec{x},t) = \theta^0_{W*}$, $\theta_{W_1} = \theta^0_{W_1^*}$, $\theta_{W_2} = \theta^0_{W_2^*}$, удовлетворяющее уравнению движения (2.12б) и неоднородным граничным условиям (2.14), (2.16), (2.18), (2.20), является динамически возможным полем шарового тензора.

3. Поле динамически возможного шарового тензора для кинематически возможного поля скоростей является изотермическим действительным полем шарового тензора, а кинематически возможное поле скоростей динамически возможного поля шарового тензора является изотермическим действительным полем скоростей.

4. Поле температур $\theta_W(\vec{x})$ и поле динамически возможного шарового тензора для кинематически возможного поля

скоростей, обращающие уравнение теплопроводности (2.12в) в тождество при выполнении граничных условий (2.24), (2.26), являются действительными полями температур и шарового тензора, а соответствующее им кинематически возможное поле скоростей является действительным полем скоростей.

Сформулированные определения позволяют констатировать следующее. Изотермические действительные поля скоростей и шарового тензора есть решение системы дифференциальных уравнений (2.12а—в), удовлетворяющее однородным кинематическим граничным условиям (2.13), (2.15), (2.19) и неоднородным кинематически-динамическим граничным условиям (2.14), (2.16), (2.18), (2.20) для однородного температурного поля $\theta^0_{W_*}$. Действительные поля скоростей, шарового тензора и температур есть решение системы дифференциальных уравнений (2.12а—в), удовлетворяющее однородным кинематическим граничным условиям (2.13), (2.15), (2.19), однородному температурному граничному условию (2.26) и неоднородным кинематически-динамически-температурным граничным условиям (2.14), (2.16), (2.18), (2.20), (2.24).

Точное решение систем дифференциальных уравнений (2.12а,б), (2.12а—в) как краевой задачи связано с непреодолимыми математическими трудностями. В связи с этим реально анализу подвергают асимптотическую математическую модель, полученную из интегральной модели путем введения упрощений, делающих возможным ее реализацию.

2. Метод взвешенных невязок и его варианты

В теории ОМД накоплен значительный опыт использования различных приближенных методов решения задач механики сплошной среды при определении полей скоростей (перемещений), напряжений и температур в реальных технологических процессах формоизменения. Суть всех приближенных методов основывается на общей идее: вследствие каких-либо допущений (упрощений) ищется приближенное решение задачи, но при этом степень соответствия приближенного и действительного решений должна быть максимально возможной. Критерии «максимального соответствия» приближенного и действительного решений задачи могут быть различными; соответственно имеется значительное число приближенных методов. При анализе задач теории пластичности используют прямые вариационные методы, методы наименьших квадратов и конечных элементов, методы Бицено — Коха, Канторовича, конечных разностей и целый ряд других. В своей математической сути эти методы основываются на сведении поиска решения некоторого дифференциального уравнения (системы урав-

нений) к решению системы алгебраических уравнений. В литературе эти методы объединяют в группу проекционных методов или под общим названием метода взвешенных невязок.

Пусть в гильбертовом пространстве H рассматривается уравнение

$$Lu = 0, \tag{3.1}$$

где L — линейный оператор в H.

Необходимо решить (3.1) в области Ω с учетом граничного условия

$$u(s) = u_s. \tag{3.2}$$

В общем случае задача приближенного решения (3.1) может быть сведена к определению последовательности приближающих функций u_N ($N = 1, 2, \ldots$), сходящихся к точному решению в соответствии с условием

$$\lim_{N \to \infty} u_N = u^*. \tag{3.3}$$

Представим u_N последовательностью [40]

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j, \tag{3.4}$$

где a_j — коэффициенты; φ_j — координатные базисные функции, для которых приближающие функции удовлетворяют заданным граничным условиям.

Вместо (3.4) можно использовать последовательность [41]

$$u_N = u_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j, \tag{3.5}$$

где $u_0(s) = u_s$; $\varphi_j(s) = 0$.

Невязка уравнения (3.1), обусловливаемая использованием u_N, определится как

$$\tilde{R} = |Lu - Lu_N| \tag{3.6}$$

или

$$\tilde{R}(a_j) = Lu_N. \tag{3.7}$$

В практике решения сложных реальных задач условие $N \to \infty$ неудовлетворимо, поэтому невязка между точным и приближенным решением всегда имеет место; цель производимых над (3.7) математических операций состоит в предельно возможной минимизации невязки $\tilde{R}(a_j)$ при наличии исходных ограничений как на число, так и на вид членов последовательностей (3.4), (3.5).

Смысл метода взвешенных невязок состоит в ортогонализации $\tilde{R}$ по отношению к системе весовых функций W_j ($j = 1, 2, \ldots, N$). С этой целью составляется система интегральных соотношений

$$\left\{\int_{\Omega} \tilde{R} W_j \, dW = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \right. \tag{3.8}$$

которая после подстановки $\tilde{R}$ преобразуется в систему N алгебраических уравнений с N неизвестными a_j.

Весовые функции W_j могут быть выбраны различными способами, и каждый из таких способов определяет соответствующую разновидность метода. Принципиально можно выделить две группы методов. В первой группе W_j выполняют роль некоторых численных коэффициентов:

метод Бицено — Коха запишем в виде

$$W_j = \begin{cases} 1 & \text{в подобласти } \Omega_j \in \Omega; \\ 0 & \text{всюду в остальной части } \Omega; \end{cases} \tag{3.9}$$

метод Кармана — Пуллхаузена по смыслу аналогичен методу Бицено — Коха, но рассмотрению подвергается одна подобласть области Ω (этот метод возник в теории пограничного слоя [42]);

метод коллокации, который следует из (3.8), если в качестве весовых применены δ-функции [43]

$$W_j = \delta(x = x_j; \quad y = y_j; \quad z = z_j),$$

что сводит систему (3.8) к условию обращения невязки $\tilde{R}$, в нуль в N точках коллокации, принадлежащих области Ω, и определению a_j из системы N алгебраических уравнений:

$$\{\tilde{R}(a_j, x, y, z)_{x=x_j;\, y=y_j;\, z=z_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.10}$$

Во вторую группу можно объединить методы, в которых роль весовых выполняют некоторые координатные функции (их произвольные вариации). Так, например, в методе наименьших квадратов для вычисления a_j используется условие

$$\int_{\Omega} \tilde{R}^2 \, d\Omega = \min, \tag{3.11}$$

которое приводит к системе N уравнений

$$\left\{\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a_j} \tilde{R} \, d\Omega = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \right. \tag{3.12}$$

где роль весовых функций играют дифференциалы $\frac{\partial \tilde{R}}{\partial a_j}$.

Таблица 5. **Основные исследования по методу взвешенных невязок**

Год	Авторы	Метод и содержание исследований
1908—1911	Релей, В. Ритц	Метод Релея — Ритца
1913—1915	И. Г. Бубнов, Б. Г. Галёркин	Метод Бубнова — Галёркина
1921	К. Пуллхаузен	Интегральный метод
1928	К. Бицено, И. Кох	Метод разделения области
1928	М. Пиконе	Метод наименьших квадратов
1932	М. Ф. Кравчук	Общая формулировка метода моментов
1933	Л. В. Канторович	Метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям
1937	Р. Фрезер, Б. Джонс, С. Скан	Метод коллокации
1938	Г. Порицкий	Метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям
1940	Ю. В. Репман	Проблемы сходимости метода Бубнова — Галёркина
1941	В. Бикли	Сравнительный анализ методов коллокации, наименьших квадратов, Бубнова — Галёркина
1943	Р. Курант, К. Фридрих	Проблемы сходимости метода Релея — Ритца
1947—1956	Г. Ямада, С. Фаедо, Дж. Грин, С. Крендалл	Развитие основных положений метода взвешенных невязок, проблемы сходимости решений
1948	А. А. Ильюшин	Метод гидродинамических приближений
1953—1962	Д. Ф. Давиденко, И. И. Ворович, М. М. Вайнберг, А. Ленгенбах, Л. М. Качанов, Л. Н. Гаген-Корн, С. Н. Розе, С. Г. Михлин, А. А. Поздеев, И. Я. Тарновский, В. Л. Колмогоров, О. А. Ганаго, В. И. Тарновский и др.	Проблемы применения вариационных методов к решению нелинейных задач
1956	Н. И. Польский	Общая схема применения проекционных методов

Продолжение табл. 5

Год	Авторы	Метод и содержание исследований
1947—1982	А. А. Марков, В. Н. Выдрин, В. Л. Колмогоров, Г. Я. Гун, И. С. Дегтярев, Е. П. Смоляков, И. С. Цурков, А. С. Городецкий, В. И. Тарновский, Н. Н. Малинин, Л. Б. Цвик, В. М. Друян, Ю. Г. Гуляев и др.	Различные варианты уравнений принципа, проблемы сходимости решения нелинейных задач, разработка проблемно-ориентированных модификаций для решения конкретных технологических задач

В методе Бубнова — Галёркина используется условие минимума потенциальной или дополнительной энергии в виде

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N} \tilde{R}_i \delta u_N \right) d\Omega = 0, \qquad (3.13)$$

где δu_N — произвольная вариация координатной функции той же системы, что и $\tilde{R}(u_N)$.

Приведенные примеры иллюстрируют широкое многообразие критериев максимально возможного соответствия приближенного и точного решений краевой задачи. В связи с этим, используя абсолютно одинаковые приближающие последовательности u_N, в зависимости от метода поиска коэффициентов a_i можно получать существенно отличные друг от друга решения одной и той же задачи [44]. При этом проблема выбора метода обычно осложняется отсутствием четких критериев оценки точности решения. Указанные проблемы объясняют факт проведения многочисленных исследований с целью совершенствования существующих и разработки новых методов и методик решения краевых задач, пригодных для использования в случае изучения сложных реальных технологических процессов. В табл. 5 приведена хронология развития метода взвешенных невязок, на основании которой можно сделать вывод о том, что в перспективе указанный метод будет развиваться преимущественно за счет совершенствования его проблемно-ориентированных модификаций (в том числе модификаций, предназначенных для преимущественного изучения процессов ОМД).

Приведенные примеры позволяют констатировать, что критерий максимального соответствия приближенного и точного решений краевой задачи $\tilde{R} \to \min$ должен быть основным. При этом указанный критерий, естественно, не отвечает достаточ-

ным условиям совпадения u_N и u^*, что и предопределяет возможность поиска приближающей функции u_N, отличной от u^*. Ошибка $\Upsilon = u^* - u_N$ зависит от выбранного критерия соответствия. Так, например, условие несжимаемости (2.12а) при осесимметричном течении описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \dot{e}_z = 0, \tag{3.14}$$

точное решение которого, отвечающее граничному условию $r = R_*$, $v_r = 0$, имеет вид

$$v_r^* = \frac{r\dot{e}_z}{2}\left(\frac{R_*^2}{r^2} - 1\right). \tag{3.15}$$

Пусть для области $1 \leqslant r \leqslant 2$ требуется найти приближенное решение (3.14) в виде, отвечающем заданному граничному условию

$$v_r = a\left(\frac{R_*}{r} - 1\right). \tag{3.16}$$

На рис. 19 представлены графики функций $\bar{v}_r(a, r) = \frac{v_r}{\dot{e}_z}$, в которых коэффициенты a определены различными методами.

В практике решения задач механики сплошной среды при поиске коэффициентов a_j приближающих последовательностей u_N довольно широко используется метод наименьших квадратов, математическая суть которого описывается уравнениями (3.11), (3.12). При использовании этого метода, в принципе, возможны различные формулировки условия локализации задачи и, соответственно, различные критерии принципа определения коэффициентов a_j.

Условие локализации при решении задач механики сплошной среды с использованием метода наименьших квадратов. Рассмотрим вариант реализации математической модели процесса ОМД, описываемой системой дифференциальных уравнений (2.12 а—в) и соответствующими граничными условиями.

Дискретизацию задачи осуществляем по методу Релея — Ритца. Аппроксимирующие функции v_i включают линейные комбинации постоянных коэффициентов a_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_1$) и в эйлеровых координатах в рамках принятых допущений удовлетворяют уравнениям неразрывности в подобласти D и условиям совпадения гранично заданных и расчетных кинематических и динамических параметров процесса на контуре s подобласти течения D. Напряжения $\sigma_{i\kappa}$ с точностью до σ_0 определяются уравнением (2.9). Величину σ_0 представляем в виде функциональной последовательности с линейной комбинацией коэффициентов a_β (здесь β может в общем случае принимать любое из зна-

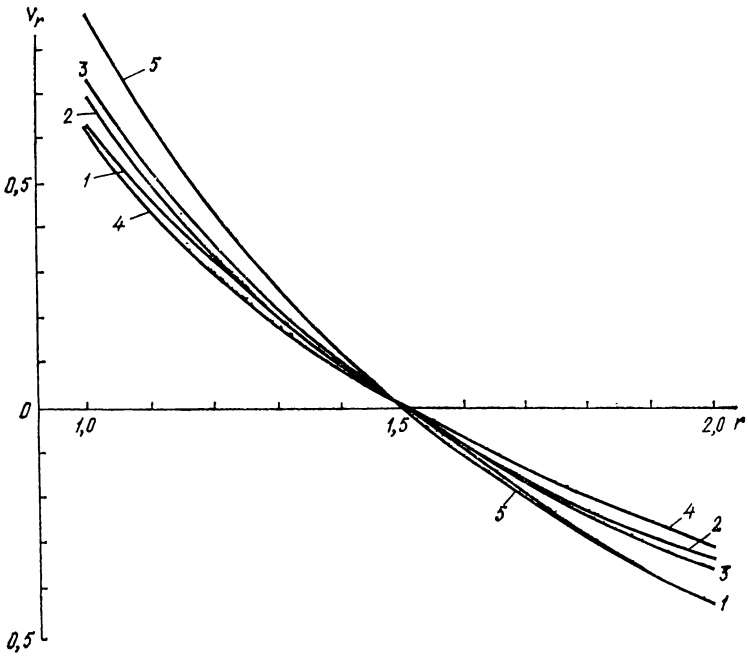

Рис. 19. Точное (*1*) и приближенные значения функции $v_r(a, r)$ при $R = 1{,}5$ в области $1 \leqslant r \leqslant 2$, где коэффициент a определен методами наименьших квадратов (*2*), Кармана — Пуллхаузена ($\Omega_i = \Omega$) (*3*), методом коллокации в точке $r^* = 1$ (*4*) и то же — в точке $r^* = 2$ (*5*)

чений α и далее β равно $\alpha_1 + 1$; $\alpha_1 + 2$, ..., $\alpha_1 + \beta_1$), удовлетворяющей соответствующим динамическим граничным условиям.

Локализацию задачи осуществляем на произвольном объеме ΔD, выдвигая условие выполнения уравнений движения (2.12 б) в ΔD. Реализацию задачи осуществляем методом наименьших квадратов, выдвигая для коэффициентов a_j следующий критерий определения: значения a_j отвечают условию минимизации в подобласти D суммы квадратов невязок $\tilde{R}_i^{(M)}$, являющихся интегралами невязок уравнений движения $\tilde{R}_i^{(0)}$ в ΔD, при изменении ΔD в пределах $0 \leqslant \Delta D \leqslant D$. Математическая запись сформулированного принципа имеет вид системы уравнений

$$\iiint_D \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\iiint_{\Delta D} \tilde{R}_i^{(0)} \, dD \right) \left(\iiint_{\Delta D} \frac{\partial \tilde{R}_i^{(0)}}{\partial a_j} \, dD \right) \right] dD = 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, N. \qquad (3.17)$$

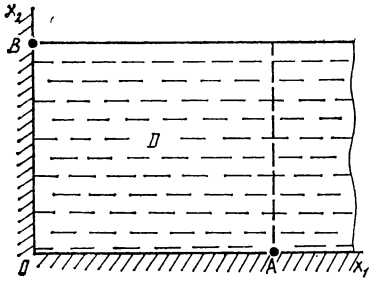

Рис. 20. Схема к решению тестовой задачи

Формально уравнение (3.17) представляет собой условие ортогонализации невязок $\tilde{R}_i^{(M)} = \iiint_{\Delta D} \tilde{R}_i^{(0)}\, dD$ относительно величин $\partial \tilde{R}_i^{(M)}/\partial a_j$, что позволяет квалифицировать предложенный метод как модифицированный проекционный метод наименьших квадратов в традиционной постановке, когда локализацию осуществляют на фиксированном объеме Ω и значения a_j определяют из системы (3.12), принимающей для рассматриваемого случая вид

$$\iiint_D \left(\sum_{i=1}^{3} \tilde{R}_i^{(0)} \frac{\partial \tilde{R}_i^{(0)}}{\partial a_j} \right) dD = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \quad (3.18)$$

Конкурентоспособность предложенного метода по отношению к методу наименьших квадратов в традиционной постановке иллюстрируется на примере решения следующей тестовой задачи (рис. 20). Идеально легкая ($\rho = 0$) и вязкая ($\mu = \text{const}$) несжимаемая жидкость с магнитными свойствами находится в покое в бесконечно широком помещенном в вакуум сосуде и имеет начальный уровень B. Определим, в рамках первой краевой задачи кинематические и динамические параметры плоского изотермического течения жидкости в области $D = A \times B$ в момент включения внешнего магнитного поля с векторами

$$X_1^* = -6x_1^2 x_2 \bar{\mu}\,[2x_2(2B + x_2) + x_1^2];$$
$$X_2^* = 2x_1 x_2 \bar{\mu}\,[2x_1^2(3x_2 - 4B) + 3x_2^2],$$

где $\bar{\mu} = \mu\eta$; η — коэффициент размерности; $\eta = 1$ м$^{-6}$ с$^{-1}$.

Точное решение системы двух дифференциальных уравнений движения и уравнения несжимаемости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ относительно v_i, σ_0 с учетом граничных условий, отвечающих условиям непроницаемости и прилипания на стенках

$$v_1|_{x_1=0} = v_1|_{x_2=0} = v_2|_{x_1=0} = v_2|_{x_2=0} = 0,$$

и выполнению уравнения Коши на свободной поверхности жидкости

$$\sigma_0|_{x_2=B} = -8x_1^3 \bar{\mu} B^3,$$

имеет вид $v_1 = -x_1^4 x_2^3 \eta$; $v_2 = x_1^3 x_2^4 \eta$; $\sigma_0 = -8x_1^3 x_2^2 \bar{\mu} B$.

Рассмотрим для наглядности простейший вариант аппроксимации точного решения. Аппроксимируем только значение σ_0 в виде функции, удовлетворяющей условию Коши $\sigma_0^* = -8ax_1^3x_2^{n^*}B^{3-n^*}\bar{\mu}$, где n^* — произвольный показатель степени.

Идеальное (в смысле максимально возможного приближения «по наименьшим квадратам» к точному значению гидростатического давления σ_0) значение аппроксимирующего коэффициента $a = a^{(n)}$ определится как

$$a^{(n)} = \left(\int_0^A \int_0^B \sigma_0^* B\, dx_1\, dx_2\right)\left(\int_0^A \int_0^B B^2\, dx_1\, dx_2\right)^{-1} = \frac{2n^*+1}{n^*+3}, \qquad (3.19)$$

где $B = -8x_1^3x_2^{n^*}B^{3-n^*}\bar{\mu}$.

Аппроксимирующие коэффициенты $a^{(0)}$ и $a^{(M)}$, рассчитанные соответственно по традиционному и предложенному методам, определяются из выражений

$$a^{(0)} = \frac{[4(n^*)^2-1][63(n^*+1)+10(n^*+3)G]}{(n^*+3)(n^*+1)[63(2n^*-1)+5(n^*)^2(2n^*+1)G]}; \qquad (3.20)$$

$$a^{(M)} = \frac{(2n^*+3)(2n^*+1)(n^*+1)[48(n^*+3)+7(n^*+1)(n^*+5)G]}{(n^*+3)(n^*+5)[144(2n^*+1)+7(n^*+1)^2(2n^*+3)G]}, \qquad (3.21)$$

где $G = A^2/B^2$.

При выводе (3.21) для определения $\tilde{R}_i^{(M)}$ было принято, что область ΔD изменяется в пределах $0 \leqslant \Delta D \leqslant D$ в направлении от координатных осей в глубь области D:

$$\tilde{R}_i^{(M)} = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \tilde{R}_i^{(0)}\, dx_1\, dx_2. \qquad (3.22)$$

Точность аппроксимации оценим по средней для всего интервала возможных значений показателя G абсолютной ошибке аппроксимации

$$P^{(0,\,M)} = \lim_{G\to\infty}\left\{\frac{1}{G}\int_0^G [a^{(0,\,M)} - a^{(n)}]\, dG\right\}. \qquad (3.23)$$

Подставив в (3.23) выражения (3.19) — (3.21), после интегрирования и вычисления пределов получим

$$P^{(0)} = \frac{2n^*+1}{n^*+3}\left[\frac{2(n^*+3)(2n^*-1)}{n^*(n^*+1)(2n^*+1)} - 1\right]; \quad P^{(M)} = 0.$$

Полученный результат позволяет констатировать, что при использовании предложенного условия локализации и соответ-

ствующего ему принципа (3.17) максимального соответствия приближенного и точного решений уравнений движения можно получать более точную в среднем аппроксимацию, чем по методу наименьших квадратов в традиционной постановке.

Рассмотрим более подробно уравнение (3.17) предложенного принципа определения аппроксимирующих коэффициентов a_j. Очевидно, что значения a_j будут зависеть от выбранного закона изменения ΔD. Также очевидно, что чем ближе аппроксимирующая функция к точному решению, тем в меньшей степени выбор закона изменения ΔD будет сказываться на конечном результате (в идеале при совпадении приближающей функции и точного решения a_j не будут изменяться при варьировании закона изменения ΔD). Указанное обстоятельство можно успешно использовать для оценки уровня соответствия приближающей функциональной последовательности и точного решения задачи.

Поясним сказанное простейшим примером. Пусть в области $b \leqslant x \leqslant c$ необходимо аппроксимировать функцию $y = x$. Аппроксимирующая функция задана в общем виде

$$\bar{y} = ax^{n^*}. \tag{3.24}$$

В соответствии с предложенным принципом, уравнение для определения аппроксимирующего коэффициента функции (3.24) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{\int_b^c\left[\int_d^x (ax^{n^*} - x)\,dx\right]^2 dx\right\} = 0, \tag{3.25}$$

где $b \leqslant d \leqslant c$.

После соответствующих преобразований (3.25) получим

$$a = \left[\frac{c^{n^*+4} - b^{n^*+4}}{n^*+4} - \frac{d^{n^*+1}(c^3 - b^3)}{3} - \frac{d^2(c^{n^*+2} - b^{n^*+2})}{n^*+2} + d^{n^*+3}(c-b)\right]\left[\frac{c^{2n^*+3} - b^{2n^*+3}}{2n^*+3} - \frac{2d^{n^*+1}(c^{n^*+2} - b^{n^*+2})}{n^*+2} + d^{2(n^*+1)}(c-b)\right]^{-1}\frac{n^*+1}{2}. \tag{3.26}$$

На рис. 21 приведена зависимость $a\,(d,\ n^*)$ при $b = 2$, $c = 4$. Из (3.26) и приведенных на рис. 21 данных видно, что положение предела интегрирования d вызывает определенное изменение величины искомого коэффициента a. Оценим колебание a вследствие изменения величины d при постоянном n^* величиной размаха относительно среднего значения

$$a_p = \frac{\Delta a}{\bar{a}}\,100\ \%, \tag{3.27}$$

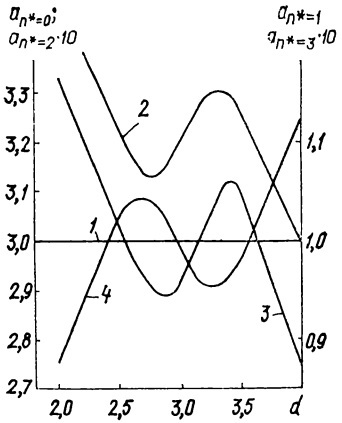

Рис. 21. Зависимость коэффициента a от значений d при различных показателях степени n^*, равных 1 (*1*), 2 (*2*), 3 (*3*), 0 (*4*)

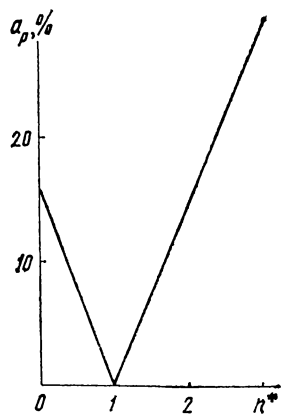

Рис. 22. Зависимость размаха a_p коэффициента a от величины показателя степени n^*

где Δa — размах, $\Delta a = a_{max} - a_{min}$; a_{max}, a_{min} — соответственно максимальное и минимальное значения a (n^*, d) при изменении d в пределах $b \leqslant d \leqslant c$ и постоянном n^*; $\bar{a}$ — среднее значение коэффициента аппроксимации в рассматриваемом интервале.

На рис. 22 приведены значения a_p, соответствующие графикам рис. 21. Анализ зависимости на рис. 22 подтверждает высказанное выше утверждение о том, что, чем больше расхождение между приближающей функцией и точным решением (в рассматриваемом примере — чем больше разность $\Delta n^* = n^* - n_a^*$, где $n_a^* = 1$ — показатель степени для точного решения), тем большее колебание испытывают искомые величины (в нашем случае — аппроксимирующий коэффициент a) при изменении закона изменения ΔD (в рассматриваемом примере — предела интегрирования d).

Таким образом, используя при определении аппроксимирующих коэффициентов a_j предложенное уравнение (3.17), можно сравнивать уровень достоверности различных приближающих уравнений. При анализе сложных математических моделей, естественно, критерии «колебания решения» сложнее, чем в приведенном выше простом примере, однако произвести оценку указанного колебания всегда можно по тем или иным расчетным параметрам процесса (здесь не исключается и субъективная сопоставительная оценка качественных картин распределения расчетных параметров в анализируемой

области). Анализ реальных процессов ОМД во многом затрудняется из-за отсутствия критериев приближения к точному решению задачи, поэтому появляющаяся при использовании (3.17) возможность сравнительной оценки степени указанного приближения можно расценивать как важное положительное свойство предложенного метода определения аппроксимирующих коэффициентов.

Рассмотрим пример возможного использования изложенных выше идей при реализации конкретной задачи ОМД, рассмотрев предварительно некоторые общие положения.

В общем случае процесс пластического деформирования при обработке металлов давлением можно представить следующим образом. Некоторое тело находится в состоянии пластического формоизменения вследствие воздействия на него рабочего инструмента. При этом на контуре контакта с инструментом гранично заданы скорости перемещения. На том же контуре, его части, или в каких-либо его точках (точке) гранично заданы значения показателя трения $f_т$ или $\bar{f}_т$. На свободной поверхности гранично задано отсутствие нормальных и касательных к поверхности напряжений.

Рассмотрим следующий ход решения задачи. Представим скорости течения v_i в виде аппроксимирующих функций, отвечающих граничным условиям по скоростям и связанных уравнением несжимаемости (2.12а). Уравнения скоростей включают l постоянных аппроксимирующих коэффициентов a_m ($m = 1, 2, \ldots, l-1$, где l — порядковый номер коэффициента). Из уравнений скоростей определяем составляющие $\dot{e}_{ik}$ тензора скоростей деформации $T_{\dot{e}}$. Используя уравнения связи напряжений и скоростей деформации (2.9), определяем значения касательных напряжений $\tau_{ik} = \frac{T}{H}\dot{e}_{ik}$. Составляем отвечающее граничному условию (2.17) аппроксимирующее уравнение для гидростатического (среднего) напряжения σ_0. Это уравнение включает $r \leqslant s$ аппроксимирующих коэффициентов a_n (в общем случае индекс n, характеризующий порядковый номер коэффициента, может принимать любое целое значение в интервале $1—l$ и далее $l+1, l+2, \ldots, s—1, s$). При таком подходе к поиску приближенного решения математической модели нормальные напряжения легко определятся из уравнений связи напряжений и деформаций (2.9). Полученные значения нормальных и касательных напряжений в виде функций от $\dot{e}_{ik}$ и σ_0 используем в дифференциальных уравнениях равновесия $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial X_i} = 0$. Значения аппроксимирующих коэффициентов $a = a_{m,n}$ определяем в соответствии с принципом (3.17), обеспечивающим приближенное выполнение

уравнений движения, и из условия соблюдения граничных условий по контактному трению на S_τ и напряжениям на S_σ. Критерии выполнения граничных условий могут быть различными. Так, например, возможен подход, состоящий в использовании метода коллокации, при котором выдвигается условие совпадения гранично заданных и расчетных значений показателя трения $\bar{f}_\tau$ в некоторых точках контактной поверхности S_τ и соблюдения уравнения Коши (2.17) в некоторых точках свободной поверхности S_σ [23, 45].

Используя рассчитанные для данных конкретных условий формоизменения коэффициенты a в уравнениях скоростей, скоростей деформаций и напряжений, получаем поля распределения v_i, $\dot{e}_{ik}$, σ_{ik} в объеме деформируемого тела.

Рассмотрим конкретный пример. Между двумя плоскими бойками, сближающимися со скоростью, абсолютная величина которой равна $v_б$, деформируется трапециевидная бесконечно длинная в направлении оси y симметричная относительно оси z полоса (рис. 23). Гранично заданы следующие характеристики контактного трения: верхний боек идеально гладкий, $f_{\tau 1} = 0$ ($f_{\tau 1}$ — показатель трения на верхнем бойке); нижний боек идеально шероховатый, $f_{\tau 2} = 1$ ($f_{\tau 2}$ — показатель трения на нижнем бойке). В соответствии с исходно заданными условиями формоизменения считаем деформированное состояние плоским ($\dot{e}_y = 0$).

Представим функцию скоростей вертикальных перемещений в виде аппроксимирующего функционального ряда

$$v_z = -v_б \left\{\bar{\lambda}\left[1 + (1 - \bar{\lambda}^2) A_1 \sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} \bar{\lambda}^{m_1 - 1} \bar{\Theta}^{2m_1}\right] + \right.$$

$$\left. + (1 - \bar{\lambda}^2)\left(A_1 \sum_{m_2=1}^{l_2} a_{m_3} \bar{\Theta}^{2m_2} + A_2\right)\right\}, \qquad (3.28)$$

где $\bar{\Theta}$, $\bar{\lambda}$ — симплексы соответственно горизонтальной и вертикальной координат, $\bar{\Theta} = \frac{x}{b}$; $\bar{\lambda} = \frac{z}{h}$; x, z — размерные значения соответственно горизонтальной и вертикальной координат в системе $x0z$ (см. рис. 23); b, h — соответственно половина средней ширины и высоты образца; A_1, A_2 — функции, обеспечивающие соблюдение граничных условий по режиму контактного трения на бойках, $A_1 = A_1(\bar{\Theta})$, $A_2 = A_2(\bar{\Theta})$; a_{m_1}, a_{m_3} — аппроксимирующие коэффициенты, общее число которых равно $l = l_1 + l_2$; m_1, m_2 — целые числа, характеризующие порядковый номер членов ряда; m_3 — порядковый номер коэффициента $m_3 = l_1 + m_2$; l_1, l_2 — общее число членов функционального ряда.

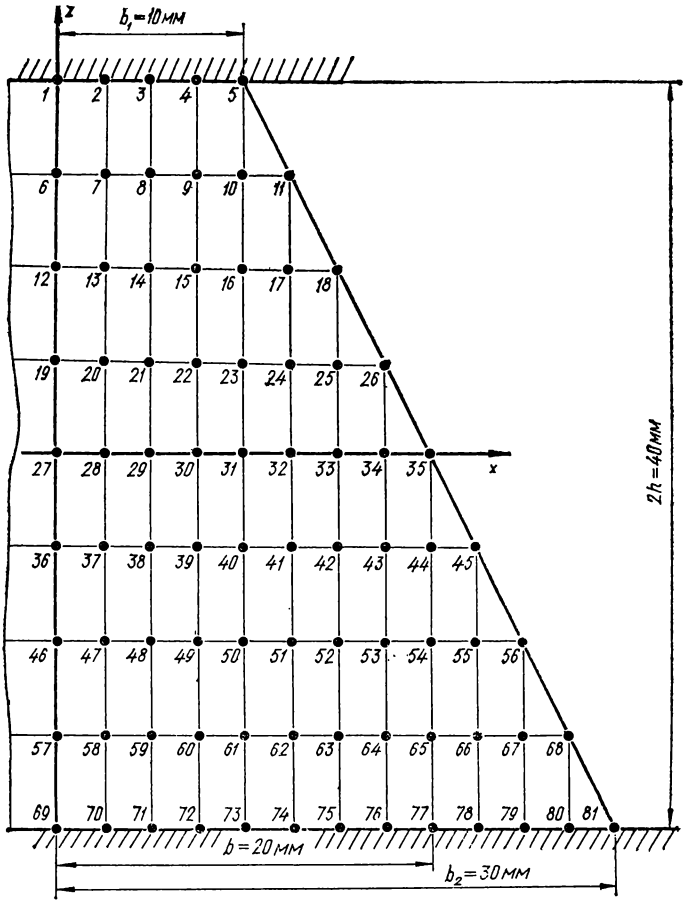

Рис. 23. Схема осадки трапециевидной полосы

Уравнение (3.28) полностью отвечает граничным условиям по скоростям вертикальных перемещений: $\bar{\lambda} = \pm 1$, $v_z = \mp v_6$ и условию симметрии эпюры вертикальных скоростей относительно оси z. Привлекая условие несжимаемости ($\dot{e}_x + \dot{e}_z = 0$), определим скорость горизонтальных перемещений v_x и составляющие тензора скоростей деформаций

$$v_x = \frac{v_6 b}{h} \int_0^{\bar{\Theta}} \left\{ 1 - 2\bar{\lambda} \left(A_2 + A_1 \sum_{m_3=1}^{l_2} a_{m_3} \bar{\Theta}^{2m_3} \right) + \right.$$

$$+ A_2 \Big[\sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} m_1 \bar{\Theta}^{2m_1} \bar{\lambda}^{(m_1-1)} - \sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} (m_1+2) \bar{\Theta}^{2m_1} \bar{\lambda}^{(2m_1+1)} \Big] \Big\} d\bar{\Theta}; \tag{3.29}$$

$$\dot{e}_z = -\dot{e}_x = \frac{v_6}{h} \Big\{ A_1 \Big[\sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} (m_1+2) \bar{\Theta}^{2m_1} \bar{\lambda}^{(m_1+1)} -$$

$$- \sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} m_1 \bar{\Theta}^{2m_1} \bar{\lambda}^{(m_1-1)} \Big] + 2\bar{\lambda} \Big(A_1 \sum_{m_2=1}^{l_2} a_{m_2} \bar{\Theta}^{2m_2} + A_2 \Big) - 1 \Big\}; \tag{3.30}$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = \frac{v_6 b}{h^2} \int_0^{\bar{\Theta}} \Big\{ A_1 \Big[\sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} m_1 \bar{\Theta}^{2m_1} \bar{\lambda}^{(m_1-1)} (m_1 - 1) -$$

$$- \sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} (m_1+1)(m_1+2) \bar{\Theta}^{2m_1} \bar{\lambda}^{m_1} \Big] - 2 (A_2 +$$

$$+ A_1 \sum_{m_2=1}^{l_2} a_{m_2} \bar{\Theta}^{2m_2} \Big) \Big\} d\bar{\Theta} - \frac{v(1-\bar{\lambda}^2)}{b} \Big(2\bar{\lambda} A_1 \sum_{m_1=1}^{l_1} a m_1 \bar{\lambda}^{(m_1-1)} \times$$

$$\times \bar{\Theta}^{(2m_1-1)} m_1 - 2 \sum_{m_2=1}^{l_2} m_2 a_{m_2} \bar{\Theta}^{(2m_2-1)} - \frac{\partial A_2}{\partial \bar{\Theta}} \Big). \tag{3.31}$$

Для рассматриваемой задачи функции A_1, A_2 определятся из следующей системы уравнений, характеризующих параметры формоизменения на контактной поверхности в условиях гранично заданного на каждом из бойков режима трения

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_x|_{\bar{\lambda}=-1} &= 0; \\ \dot{\gamma}_{xz}|_{\bar{\lambda}=1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Подставляя (3.30), (3.31) в (3.32), после соответствующих преобразований получаем значения искомых функций

$$\bar{A}_1 = (\bar{M} - \bar{Q})^{-1}; \tag{3.33}$$

$$\bar{A}_2 = \frac{\bar{M} - 2\bar{N}}{2(\bar{M} - \bar{Q})} - 0{,}5, \tag{3.34}$$

где

$$\bar{M} = \sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} (-1)^{(m_1+1)} (m_1+2) \bar{\Theta}^{2m_1} -$$

$$- \sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} (-1)^{(m_1-1)} m_1 \bar{\Theta}^{2m_1};$$

$$\bar{Q} = \sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} (m_1 - 1) m_1 \bar{\Theta}^{2m_1} -$$

$$- \sum_{m_1=1}^{l_1} a_{m_1} (m_1 + 1)(m_1 + 2)\,\bar{\Theta}^{2m_1};$$

$$\bar{N} = \sum_{m_2=1}^{l_2} a_{m_3} \bar{\Theta}^{2m_2}.$$

После подстановки (3.33), (3.34) в (3.30), (3.31) составляющие тензора скоростей деформации $\dot{e}_x$, $\dot{\gamma}_{xz}$ приобретают окончательный вид функции искомых аппроксимирующих коэффициентов a_{m_1}, a_{m_3}.

Далее, в соответствии с изложенной выше методикой, представим в виде аппроксимирующего функционального ряда гидростатическое напряжение

$$\sigma_0 = \frac{2T v_б}{Hh}\left\{\bar{\Theta}^2 - \left[1 + \frac{(b_1 - b_2)\,\bar{\lambda}}{2b}\right]^2\right\} \sum_{n_1=1}^{s_1} [(1 + \bar{\lambda}^{n_1}) \times$$

$$\times \left(a_{n_1} + \sum_{n_2=1}^{s_2} a_{n_3} \bar{\Theta}^{2n_2}\right)] + G(\bar{\lambda}), \qquad (3.35)$$

где b_1, b_2 — соответственно половина меньшего и большего оснований заготовки; n_1, n_2 — целые числа, характеризующие порядковые номера членов ряда; s_1, s_2 — общее число членов соответствующего ряда; n_3 — порядковый номер аппроксимирующего коэффициента, $n_3 = s_2 n_1 + n_2$; $C(\bar{\lambda})$ — функция, численно равная напряжению σ_0 на свободной поверхности, описываемой уравнением

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_c = 1 + \frac{(b_1 - b_2)\,\bar{\lambda}}{2b}.$$

Уравнение (3.35) отвечает условию симметрии напряжения σ_0 относительно оси z.

Условие статического равновесия треугольного элемента, выделенного у свободной поверхности образца ($\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_c$), после привлечения уравнений связи скоростей деформаций и напряжений можно представить в виде системы уравнений

$$\sigma_0^c = \frac{-T}{\cos 2\alpha_c \sqrt{1 + 1{,}5\,\mathrm{tg}^2 2\alpha_c}}; \qquad (3.36а)$$

$$2\dot{e}_x^c \,\mathrm{tg}\, 2\alpha_c - \dot{\gamma}_{xz}^c = 0, \qquad (3.36б)$$

где «с» — индекс, означающий принадлежность к свободной поверхности; $\alpha_c = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{b_2 - b_1}{2h}$.

Уравнения (3.36а,б) являются развернутой записью граничного условия (2.17). Уравнение (3.36а) используем в (3.35), так как $\sigma_0^c = C(\bar{\lambda})$. Уравнению (3.36б) удовлетворим прибли-

женно, используя метод наименьших квадратов в традиционной интерпретации

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a_{m_1}}\int_{-1}^{1}(2\dot{e}_x^c \operatorname{tg} 2\alpha_c - \dot{\gamma}_{xz}^c)^2\, d\bar{\lambda} = 0; \quad m_1 = \overline{1;\ l_1};\\ &\frac{\partial}{\partial a_{m_3}}\int_{-1}^{1}(2\dot{e}_x^c \operatorname{tg} 2\alpha_c - \dot{\gamma}_{xz}^c)^2\, d\bar{\lambda} = 0; \quad m_3 = \overline{l_1+1,\ l_1+l_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.37)$$

Система (3.37) включает исключительно кинематические характеристики процесса и после ее решения составляющие тензора скоростей деформации определены. Вследствие нелинейности системы (3.37) относительно коэффициентов a_m ее решение проводили методом сканирования, ограничившись значениями $l_1 = 2$, $l_2 = 1$.

Полученные значения $\dot{e}_{i\kappa}$ использовали совместно с (3.35) в уравнениях движения и значения коэффициентов a_n определяли в соответствии с уравнением (3.17). При этом использовали реологическое уравнение вида

$$T = 146 H \Delta t^{0,5}, \text{ МПа}, \qquad (3.38)$$

которое аппроксимирует зависимость $T—H—\Lambda—\theta$ подшипниковой стали ШХ-15 в интервалах значений $H = 0 \div 0{,}2\text{с}^{-1}$; $\Lambda = H\Delta t = 0 \div 0{,}2$; $\theta = 1120 \div 1150$ °С с ошибкой, не превышающей 7 %.

При использовании (3.38) в уравнениях движения система уравнений для определения коэффициентов a_n линейна относительно указанных коэффициентов и ее решение методом Гаусса — Зейделя не вызывает затруднений при $s_1 = s_2 \leqslant 5$. Операцию интегрирования выполняли численно, при этом варьировали порядок прохождения прямоугольников, ограниченных точками *1—81*, показанными на рис. 23. Значения s_1 и s_2 постепенно увеличивали. При этом критерием остановки ЭВМ было

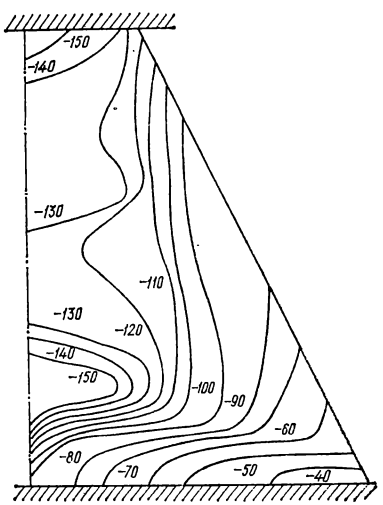

Рис. 24. Линии равных вертикальных напряжений σ_z (МПа) при $\Delta t = 1$ с

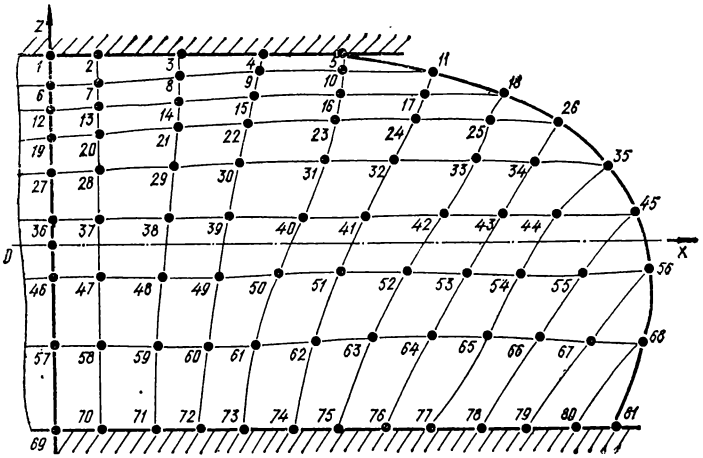

Рис. 25. Искажение формы образца за $\Delta t = 7{,}5$ с
Обозначения те же, что и на рис. 23

снижение величины максимального размаха, определяемого выражением (3.27), у каждого из искомых коэффициентов до уровня $a_p < 10$ %.

На рис. 24, 25 приведены результаты расчета параметров деформации при $v_б = 10^{-3}$м/с.

Сопоставление эффективности различных вариантов. Основная сложность при решении задач механики сплошной среды методами дискретизации полей скоростей и напряжений состоит в том, что исходно выбранные приближающие последовательности должны по своей математической структуре удовлетворять значительному числу однородных и неоднородных (смешанных) граничных условий. Как правило, точно удовлетворить граничным условиям, даже при решении относительно простых задач теории ОМД, невозможно из-за непреодолимых математических трудностей. В то же время точность соблюдения граничных условий существенно влияет на точность конечного результата реализации математической модели в плане ее адекватности реальному процессу по основным параметрам формоизменения.

Высказанные соображения заложены в основу методики приближенного определения кинематических параметров формоизменения, изложенной в работе [23]. При определении составляющих тензоров T_σ, $T_{\dot{\varepsilon}}$ и величин $\vec{v}$ необходимо, чтобы полученные поля скоростей и напряжений удовлетворяли системе дифференциальных уравнений (2.12) и соответствующим

граничным условиям. В практике математического моделирования процессов ОМД широко используются энергетические и вариационно-энергетические методы [4, 26, 32] в различных интерпретациях. Общая идея этих методов состоит в замене уравнения движения (2.12б) или уравнения несжимаемости (2.12а) и уравнения движения некоторым энергетическим функционалом. В основе преобразований лежит равенство [4]

$$\iiint_D \operatorname{div} T_A \vec{b} dW = \iint_S \vec{a}^n \vec{b} ds - \iiint_D a_{ik}\beta_{ik} dW, \qquad (3.39)$$

где $\vec{b}$ — заданное в D векторное поле; T_A — заданное в D поле симметричного тензора, $T_A = [a_{ik}]$;

$$\vec{a}^n = T_A \vec{n};\ \beta_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_k} + \frac{\partial b_k}{\partial x_i}\right).$$

Независимо от вида энергетического принципа в (3.39) полагают, что $T_A = T_\sigma$, а условие

$$\iiint_D \operatorname{div} T_\sigma \vec{b} dW = 0 \qquad (3.40)$$

отвечает условию $\operatorname{div} T_\sigma \equiv 0$ в подобласти D. Однако последнее утверждение справедливо лишь в том случае, если $\vec{b}$ — функции, обращающиеся в нуль на границе области D, т. е. на S [46]. Реально в качестве $\vec{b}$ используют функции не удовлетворяющие этому условию, вследствие чего полученные решения удовлетворяют уравнениям движения лишь в каком-то приближении, степень которого зависит от многих факторов. Указанный факт не раз ставил под сомнение многие положения энергетических методов [47].

Кроме того, решения, полученные энергетическими методами в ряде случаев не удовлетворяют граничным условиям (в первую очередь условию равенства гранично заданных и расчетных величин напряжений контактного трения), что также снижает адекватность рассматриваемых математических моделей их реальным аналогам.

Для того чтобы в какой-то мере снизить погрешности, обусловленные указанными факторами, в качестве приближающих последовательностей используют функции, качественный характер которых устанавливают экспериментально. Эти функции называют подходящими. Так, например, в работе [26] при решении задачи об осадке бесконечно длинной прямо-

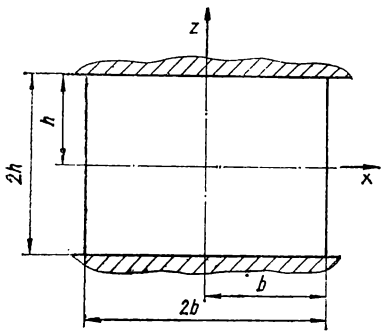

Рис. 26. Схема осадки прямоугольной полосы

угольной полосы шероховатыми бойками (рис. 26) используются функция вертикальных скоростей течения вида

$$v_z = -\left[\frac{v_0}{h} + a\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\right] z \quad (3.41)$$

и связанная с ней условием несжимаемости $\dot{e}_x = -\dot{e}_z$ функция горизонтальных скоростей течения

$$v_x = \left[\frac{v_0}{h} + a\left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right)\left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right)\right] x. \quad (3.42)$$

Выбор функции (3.41) был обусловлен предварительно проведенными экспериментальными исследованиями, в ходе которых изучался характер искажений координатной сетки, нанесенной на составные образцы. Было установлено, что для $\frac{b}{h} > 1$ функции (3.41), (3.42) качественно соответствуют экспериментальным.

При определении коэффициента a из уравнения вариационного принципа Журдена принимали, что напряжение контактного трения имеет вид

$$\tau^* = f_\tau k, \quad (3.43)$$

и получили

$$a = 0{,}416 f_\tau \frac{b v_0}{h^2}\left(0{,}213 + 0{,}648\frac{b^2}{h^2} + 0{,}026\frac{h^2}{b^2}\right)^{-1} \quad (3.44)$$

В то же время расчетное напряжение контактного трения для исходного выражения (3.41) определяется формулой

$$\tau = k\left(\frac{\dot{\gamma}_{xz}}{H}\right)_{z=h}, \quad (3.45)$$

где $\dot{\gamma}_{xz} = 6a\frac{x}{h}\left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right)$;

$$H = \sqrt{4\left[\frac{v_0}{h} - 2a\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\right]^2 + 36a^2\frac{x^2}{h^4}\left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right)^2}.$$

Очевидно, что между гранично заданными и расчетными значениями напряжений контактного трения, определяемыми

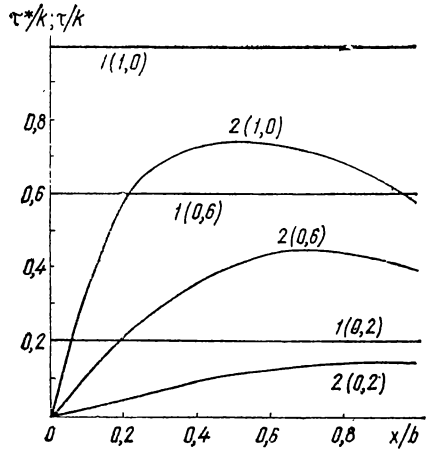

Рис. 27. Зависимости τ^*/k (*1*) и τ/k (*2*) при $b/h = 1$ от x/b

Цифры в скобках — значение показателя трения f_τ

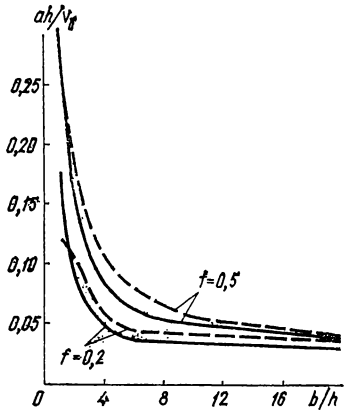

Рис. 28. Зависимость отношения ah/v_6 от показателя b/h

соответственно выражениями (3.43) и (3.45), имеется значительное расхождение (рис. 27).

Идея предлагаемой методики определения a_j основывается на следующем предположении: не достаточно ли для определения a_l при наличии подходящей функции выполнить граничные условия по напряжениям контактного трения, чтобы получить точность решения, соизмеримую с точностью других приближенных методов? Для реализации предлагаемого метода предлагается приравнивать расчетные и гранично заданные значения показателей трения $f_{\tau i}$ в i характерных точках очага деформации (см. рис. 18).

В отношении только что рассмотренной задачи об осадке полосы характерной точкой является граничная точка с координатами $x = b$, $z = h$. Тогда уравнение для определения коэффициента a в выражении (3.45) примет вид

$$\left(\frac{\dot{\gamma}_{xz}}{H}\right)_{\substack{x=b,\\ z=h}} = f^*_{\tau 1}. \qquad (3.46)$$

Для того чтобы сопоставить значения коэффициентов a, определенных энергетическим (выражение (3.44)) и предлагаемым методами, используем в (3.46) то же допущение, которое принято в работе [26] при выводе (3.44):

$$H = \frac{2v_6}{h}, \qquad (3.47)$$

и то же значение показателя трения

$$f_{\tau 1}^{*} = f_{\bar{\tau}}, \tag{3.48}$$

где $f_{\bar{\tau}} = f_{\bar{\tau}}\left(f, \frac{b}{h}\right)$ в соответствии с (2.53), считая $R_{\text{ц}}^{*} = b$.

Подставляя (3.47), (3.48) и значение γ_{xz} из (3.45) в (3.46), после преобразований получаем

$$a = \frac{v_6}{2b} f_{\bar{\tau}}. \tag{3.49}$$

На рис. 28 приведены зависимости ah/v_6 как функции показателя формы b/h и коэффициента трения при расчете по формулам (3.44) и (3.49) (пунктир и сплошные линии соответственно). Близкое совпадение расчетных данных подтверждает как правомерность высказанного предположения, так и конкурентоспособность предложенного метода. При этом как неоспоримый плюс предложенного метода следует считать его безынтегральную форму, что на порядок снижает трудоемкость расчетов при его использовании.

Возвращаясь к мысли о необходимости максимально возможного приближения математической модели к условию удовлетворения граничным условиям анализируемого процесса, заметим, что анализируемое течение в своей основе по составляющим T_{e} не удовлетворяет условию равновесия на свободной поверхности (3.36б). В связи с этим, основываясь на высказанных соображениях, трудно ожидать высокой степени достоверности от модели, описываемой уравнениями, вытекающими из исходно принятой приближающей последовательности (3.41), поэтому для получения более точной модели усложним (3.41), введя дополнительный коэффициент a_2, который своим значением должен удовлетворить (в приближенном смысле, конечно) граничному условию (3.36б). Пусть исходное уравнение вертикальных скоростей имеет вид

$$v_z = z\left[1 + a_1\left(1 - a_2\bar{x}^2\right)\left(1 - \bar{z}^2\right)\right] V, \tag{3.50}$$

где V — скоростной критерий процесса, с^{-1}, $V = v_6/h$; $\bar{x} = x/b$; $\bar{z} = z/h$.

Составляющие $T_{\dot{e}}$, удовлетворяющие условию несжимаемости (2.12а), определятся из (3.50) после соответствующих математических преобразований

$$\dot{e}_x = -V\left[1 + a_1\left(1 - a_2\bar{x}^2\right)\left(1 - 3\bar{z}^2\right)\right]; \tag{3.51}$$

$$\dot{e}_z = V\left[1 + a_1\left(1 - a_2\bar{x}^2\right)\left(1 - 3\bar{z}^2\right)\right]; \tag{3.52}$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = 2VBa_1\bar{x}\bar{z}\left[3 + \left(\frac{\bar{z}^2 - 1}{B^2} - \bar{x}^2\right) a_2\right]. \tag{3.53}$$

Из ((3.51) — (3.53)) определяем значения скоростей деформации на свободной поверхности ($\bar{x} = 1$)

$$\dot{e}_x^c = -V[1 + a_1(1 - a_2)(1 - 3\bar{z}^2)]; \tag{3.54}$$

$$\dot{\gamma}_{xz}^c = 2VBa_1\bar{z}\left[3 + \left(\frac{\bar{z}^2 - 1}{B^2} - 1\right)a_2\right]. \tag{3.55}$$

Подставляя (3.54), (3.55) в (3.36б) получаем

$$Ba_1\bar{z}\left[3 + \left(\frac{\bar{z}^2 - 1}{B^2} - 1\right)a_2\right] + [1 + a_1(1 - a_2)(1 - 3\bar{z}^2)]\operatorname{tg}\alpha_н = 0, \tag{3.56}$$

где $\alpha_н$ — угол между нормалью к свободной поверхности и осью x, $\alpha_н = \int_0^t \frac{\partial v_z^c}{\partial z}\,dt$.

Из (3.56) следует, что реально процесс осадки не является стационарным, так как $a_j = a_j[\alpha_н(t)]$, $j = 1; 2$. Используя допущение о стационарности процесса деформации в пределах относительно малых конечных обжатий, зафиксируем величину $\alpha_н(t)$ на уровне $\alpha_н(0)$. Тогда граничное условие (3.56) принимает вид

$$Ba_1\bar{z}\left[3 + \left(\frac{\bar{z}^2 - 1}{B^2} - 1\right)a_2\right] = 0. \tag{3.57}$$

Тривиальное решение (3.57) в виде $a_1 = 0$ не удовлетворяет физическому смыслу, так как рассматривается процесс неоднородной деформации. Поэтому решение (3.57) можно представить лишь в виде

$$a_2 = \frac{3B^2}{B^2 - \bar{z}^2 + 1}. \tag{3.58}$$

Из (3.58) следует, что для точного удовлетворения граничному условию (3.57) коэффициент a_2 должен быть функцией $A_2(\bar{z})$ симплекса $\bar{z}$, что противоречит в ранее выполненных математических выкладках условию постоянства указанного коэффициента. Сказанное приводит к необходимости использования приближенных методов для определения a_2. Рассмотрим и сравним результаты использования некоторых из них.

График функции $A_2(\bar{z})$, соответствующий уравнению (3.58), приведен на рис. 29. В соответствии с методом коллокации коэффициент a_2 может принять любое из значений функции A_2 (0; 1) Учитывая, что функция $A_2(\bar{z})$ монотонна, принимаем

$$a_2 = A_2(0{,}5) = \frac{3B^2}{B^2 - 0{,}75}. \tag{3.59}$$

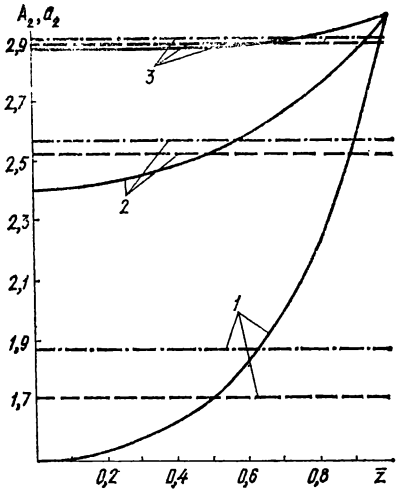

Рис. 29. График функции $A_2(\bar{z})$ (сплошные линии) и $a_2(\bar{z})$, определенных по уравнениям (3.59) и (3.62) (пунктир и штрихпунктир соответственно):
1 — $B = 1$; *2* — $B = 2$; *3* — $B = 5$

Условие наименьших квадратов в интегральной и точечной записи дает соответственно следующие выражения для определения искомого коэффициента:

$$\int_0^1 \left(a_2 - \frac{3B^2}{B^2 - \bar{z}^2 + 1}\right) d\bar{z} = 0; \tag{3.60}$$

$$\sum_{\substack{\text{по всем} \\ i=1}}^{n_0} \left(a_2 - \frac{3B^2}{B^2 - \bar{z}^2 + 1}\right)_i = 0, \tag{3.61}$$

где i — порядковый номер точки в рассматриваемом интервале $0 \leqslant \bar{z} \leqslant 1$; n_0 — общее число точек в том же интервале.

На рис. 30 приведены результаты расчета коэффициента a_2 по формуле (3.61) при различном числе анализируемых точек n_0[1]. На рис. 31 приведена зависимость суммы квадратов невязок в одиннадцати равномерно распределенных по рассматриваемому интервалу точках как функция числа анализируемых точек n_0. Из графиков следует, что увеличение n_0 повышает точность определения a_2 (в смысле наименьших квадратов). При $n_0 \to \infty$ значение a_2 определяется решением (3.60):

$$a_2 = \frac{3B^2}{2B_1} \ln \frac{B_1 + 1}{B_1 - 1}, \tag{3.62}$$

где $B_1 = (B^2 + 1)^{0,5}$.

Значения коэффициентов a_2, рассчитанные по формуле (3.62), приведены на рис. 29.

Резюмируя результаты проделанных вычислений, можно сделать вывод, что для относительно гладких монотонных функций результаты расчета аппроксимирующих коэффициентов a_i методом коллокации, методом наименьших квадратов

[1] При $n_0 = 1$, $\bar{z}_1 = 0{,}5$; при $n_0 = 2$, $\bar{z}_1 = 0$, $z_2 = 1$, при $n_0 \geqslant 3$, $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 = 1$, а остальные точки равномерно распределены в интервале $0 \leqslant \bar{z} \leqslant 1$; при $n_0 = 1$ поиск a_2 по методам коллокации и наименьших квадратов дает одинаковый результат, так как (3.61) трансформируется в (3.59).

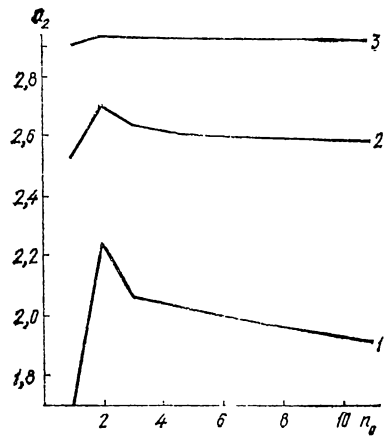

Рис. 30. Зависимость коэффициента a_2 от числа анализируемых точек при определении a_2 методом наименьших квадратов.

Обозначения те же, что и на рис. 29

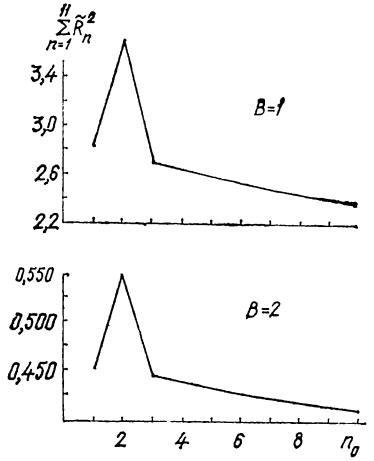

Рис. 31. Зависимость суммарной квадратичной невязки от числа анализируемых точек

в интегральной и точечной (суммарной) постановке близки (при относительно небольшом числе точек n_0). Этот вывод представляет интерес, поскольку в большинстве процессов обработки металлов давлением исследуемые кинематические и динамические характеристики изменяются монотонно по характерным направлениям зоны формоизменения (например, скорости монотонно возрастают, а контактные давления монотонно снижаются в направлении движения заготовки при прессовании и волочении).

Определив значение a_2, приближенно удовлетворяющее одному из граничных условий (3.36а, б), определим значение a_1, удовлетворяющее условию совпадения гранично заданных и расчетных значений напряжений контактного трения.

Рассмотрим два из возможных вариантов определения a_1. В основу первого варианта заложим условие совпадения $f_{\text{т}1}$ и $f_{\text{т}1}^*$ в граничной точке контактной поверхности ($\bar{x} = 1$, $\bar{z} = 1$). Математическая запись этого условия имеет вид

$$\left.\frac{\dot{\gamma}_{xz}}{H}\right|_{\substack{x=1,\\ z=1}} = f_{\text{т}1}^*,$$

что после подстановки входящих величин и решения относительно a_1 дает выражение

$$a_1 = d \pm \sqrt{d^2 - e_1}, \qquad (3.63)$$

где

$$d = \frac{2(1-a_2) f^*_{\text{т}1}}{4(1-a_2)^2 (f^*_{\text{т}1})^2 + B^2 (3-a_2)^2 [(f^*_{\text{т}1})^2 - 1]};$$

$$e_1 = \frac{(f^*_{\text{т}1})^2}{B^2 (3-a_2)^2 [1-(f^*_{\text{т}1})^2] - 4(1-a_2)^2 (f^*_{\text{т}1})^2}.$$

По физическому смыслу в соответствии с направлением напряжений контактного трения в первом и третьем координатных квадрантах величина $f^*_{\text{т}1}$ отрицательна, а во втором и четвертом — положительна, поэтому коэффициент a_1 должен быть больше нуля и в (3.63) следует брать арифметическое значение корня.

В основу второго варианта расчета заложим условие совпадения средних для всей контактной поверхности расчетных и гранично заданных показателей трения $\bar{f}_{\text{т}}$ и $\bar{f}^*_{\text{т}}$. Математическая запись этого условия имеет вид

$$\int_0^1 \frac{Ba_1\bar{x}(3-a_2\bar{x}^2)\,\operatorname{sign} V dx}{\sqrt{B^2 a_1^2 \bar{x}^2 (3-a_2\bar{x}^2)^2 + [1-2a_1(1-a_2\bar{x}^2)]^2}} = \bar{f}^*_{\text{т}}. \quad (3.64)$$

Заметим, что условие, основанное на использовании показателя трения $f^*_{\text{т}1}$, значительно проще в решении, чем условие, основанное на использовании показателя трения $\bar{f}^*_{\text{т}}$, что подтверждает целесообразность проведенного выше исследования по выявлению связи $f^*_{\text{т}1}$ с основными параметрами формоизменения.

На рис. 32 и 33 приведены результаты расчета коэффициента a_1 по формулам (3.63), (3.64) соответственно. Сопоставляя расчетные данные, приведенные на рис. 32, 33, можно заметить, что каждому из значений $f^*_{\text{т}1}$ соответствует некоторое значение $\bar{f}^*_{\text{т}}$, отвечающее условию равенства коэффициента a_1. На рис. 34 показаны кривые, отвечающие условию $a_1(B, f^*_{\text{т}1}) = a_1(B, \bar{f}^*_{\text{т}})$. Сделанное сопоставление позволяет прийти к следующему выводу: при расчете кинематических параметров течения будут получены одинаковые результаты, если использовать значения $f^*_{\text{т}1}$ и $\bar{f}^*_{\text{т}}$ в соответствии со связями, представленными на рис. 34. Данные, представленные на рис. 16, указывают на то, что в реальных условиях так же существует однозначная связь между $f_{\text{т}1}$ и $\bar{f}_{\text{т}}$ для формоизменения в конкретных условиях. Обработка экспериментальных данных, представленных на рис. 16, позволяет

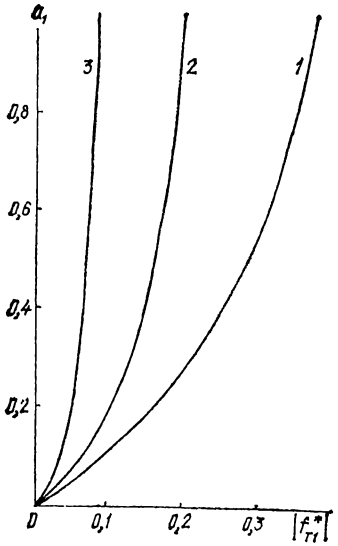

Рис. 32. Зависимость коэффициента a_1 от показателя трения $f^*_{т1}$.

Обозначения те же, что и на рис. 29

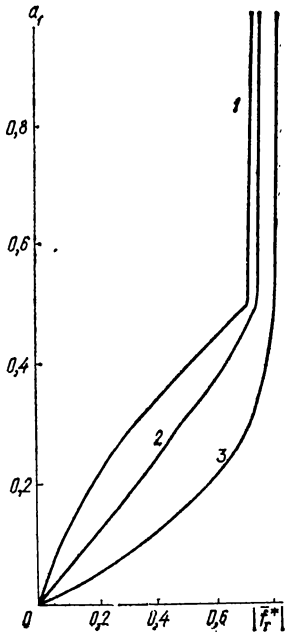

Рис. 33. Зависимость коэффициента a_1 от показателя трения $\bar{f}^*_т$.

Обозначения те же, что и на рис. 29

интерпретировать результаты исследования в виде графиков связи $f^*_{т1} - \bar{f}^*_т$, представленных на рис. 35. Сопоставление эмпирической и расчетной связей $f^*_{т1} - \bar{f}^*_т$ указывает на то, что математическая модель, в основу которой положено уравнение (3.50), включающее два коэффициента a_j ($j = 1; 2$), дает весьма близкую (как в качественном, так и в количественном отношениях) к экспериментальной картину характера указанной связи. Для сравнения на рис. 34 показан характер связи показателей трения $\bar{f}^*_т$ и $f^*_{т1}$ для математической модели, в основу которой положено уравнение (3.41); очевидно весьма существенное расхождение расчетных и эмпирических данных.

Таким образом, введение дополнительного коэффициента a_2 в исходное кинематическое уравнение и рассмотрение дополнительного граничного условия позволило значительно повысить достоверность математической модели.

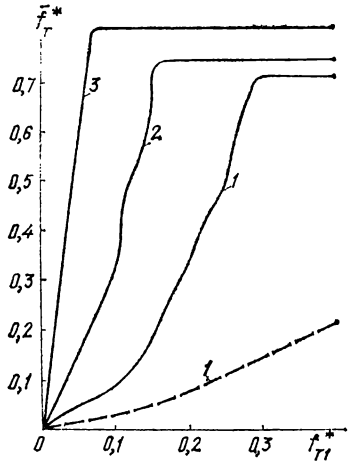

Рис. 34. Аналитическая связь показателей трения $f_{т1}^*$ и $\bar{f}_т^*$, соответствующая адекватным условиям формоизменения:
сплошные линии соответствуют модели по уравнению (3.50), пунктир — по уравнению (3.41); остальные обозначения те же, что и на рис. 29

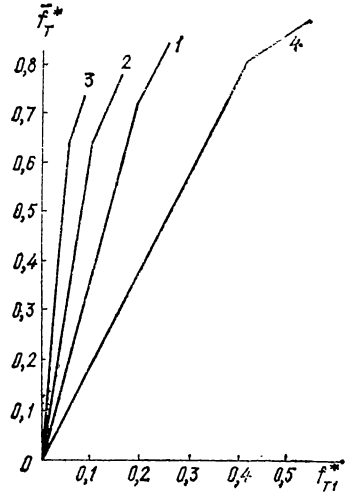

Рис. 35. Эмпирическая связь показателей трения $f_{т1}^*$ и $\bar{f}_т^*$, соответствующая адекватным условиям формоизменения:
1 — $B = 1$; *2* — $B = 2$; *3* — $B = 5$; *4* — $B = 0{,}25$

Перейдем к определению динамических характеристик процесса. Представим величину гидростатического напряжения аппроксимирующей зависимостью вида

$$\sigma_0 = -[(1 - \bar{x}^2)(a_3 + a_4\bar{z}^2) + 1]T, \qquad (3.65)$$

удовлетворяющей условию симметрии распределения σ_0 по поперечному сечению образца; вытекающему из граничного условия (3.36а) равенству $\sigma_0^c = -T$; экспериментально подтверждаемому допущению о монотонности изменения σ_0 в направлении выбранных осей координат x и z.

Обратим внимание на важное обстоятельство: так как коэффициенты $a_j = a_m$ $(j = 1; 2)$, входящие в уравнения составляющих тензора скоростей деформации $T_e^{\cdot}$, определены в ходе мероприятий по удовлетворению граничным условиям, дифференциальные уравнения равновесия линейны относительно искомых коэффициентов $a_j = a_n (j = 3; 4)$, определение которых является целью дальнейшего решения задачи, независимо от вида закона (2.28). Кстати, аналогичная картина наблюдалась и при решении задачи об осадке трапециевидной полосы. Отмеченный факт — неоспоримое преимущество излагаемой

методики реализации математических моделей процессов ОМД, так как обычно основную трудность при определении коэффициентов a_l вызывает нелинейность рассматриваемых уравнений. Конечно, осуществить такой подход к решению задачи не всегда оказывается возможным как из-за сложности однородных граничных условий, так и из-за наличия смешанных граничных условий, но в ряде случаев прием разделения кинематических a_m и динамических a_n коэффициентов, как видно из приведенных примеров, оказывается весьма эффективен.

Продолжим решение рассматриваемой задачи и определим аппроксимирующие коэффициенты $a_l = a_n$. Для сравнения эффективности поиск значений a_n ($n = 3; 4$) осуществим четырьмя методами: методом коллокации, методами наименьших квадратов в суммарной и интегральной постановках и модифицированным методом наименьших квадратов.

При решении задачи использовали модель идеальной пластичности $T = k$, что позволило провести сравнение полученных результатов с результатами исследований других авторов (см. ниже).

При использовании метода коллокации использовали точку с координатами $\bar{x} = 1$, $\bar{z} = 1$. Выбор этой точки не случаен и определяется тем, что на координатных осях одно из двух уравнений движения выполняется тождественно вследствие симметрии относительно соответствующих осей исходных кинематических и динамического аппроксимирующих уравнений. Естественно предположить, что по мере удаления от осей степень несоблюдения уравнений движения увеличивается и поэтому целесообразно добиться их выполнения в наиболее удаленной от осей точке. Учитывая, что искомых коэффициентов в рассматриваемой задаче два, так же как и уравнений движения, значения a_3, a_4 определяли в соответствии с условием точного соблюдения $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ в выбранной точке из системы двух линейных алгебраических уравнений, в которую трансформируется система дифференциальных уравнений движения после подстановки в нее аппроксимирующих уравнений (3.51) — (3.53), (3.65) и условия $T = k$.

При использовании метода наименьших квадратов в суммарной постановке варьировали число анализируемых точек n_0, увеличивая число n_0 в соответствии с приведенной на рис. 36 схемой от $n_0 = 4$ до $n_0 = 36$ с кратностью $\Delta n_0 = 4$. При использовании этого метода в интегральной постановке пользовались стандартной программой ЭВМ ЕС-1033.

При использовании модифицированного метода наименьших квадратов исходили из тех же соображений, что и при решении задачи об осадке трапециевидной полосы. При расчете

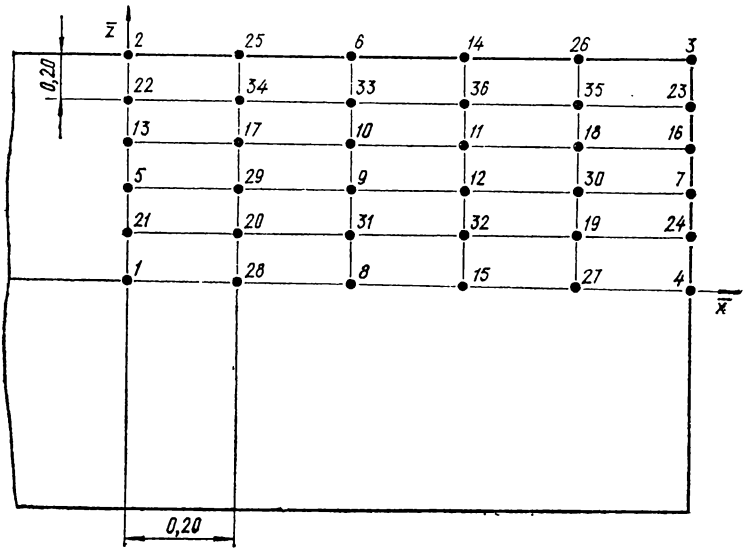

Рис. 36. Схема к решению тестовой задачи

коэффициентов $a_j (j = n)$ значения кинематических коэффициентов $a_j (j = m)$ определяли как функции показателя формы полосы и показателя трения $f^*_{\text{т}1}$, который, в свою очередь, определяли в соответствии с аппроксимирующей зависимостью (2.52). Таким образом, коэффициенты $a_j (j = n)$ получены как функции B_* и δ_*; первый из параметров отражает влияние геометрических размеров на динамические параметры формоизменения, второй — характеризует условия контактного взаимодействия.

Результаты расчетов сводятся к следующему.

1. При вычислении коэффициентов a_3, a_4 методами коллокации традиционным и модифицированным методами наименьших квадратов в интегральной постановке получаются относительно близкие конечные результаты (рис. 37).

2. При варьировании нижней границы интегрирования в случае использования модифицированного метода наименьших квадратов максимальная величина $a_{\text{р}}$ составляет 7,6 и 8,4 % соответственно для коэффициентов a_3 и a_4, что характеризует достаточно высокий уровень точности аппроксимации.

3. При использовании метода наименьших квадратов в суммарной интерпретации значения коэффициентов a_3, a_4 зависят от числа n_0 анализируемых в области пластического течения точек. По мере увеличения n_0 значения a_3, a_4 сходятся к величине этих коэффициентов, определенной методом

наименьших квадратов в интегральной постановке (рис. 38). При $n_0 \geqslant 8$ относительная разница между значениями коэффициентов a_3, a_4, определенных методами наименьших квадратов в суммарной и интегральной постановках не превышает 10 %. При этом расчет искомых коэффициентов методом наименьших квадратов в суммарной постановке требует примерно в 5 раз меньше машинного времени, чем расчет методом наименьших квадратов в интегральной постановке.

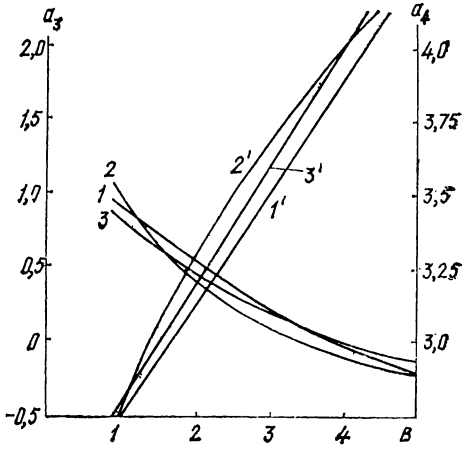

Рис. 37. Результаты расчета аппроксимирующих коэффициентов a_3 (цифры со штрихом), a_4 (цифры без штриха) различными методами:

1 — коллокации; *2* — наименьших квадратов в интегральной постановке; *3* — модифицированным методом наименьших квадратов ($\delta_* = 5$ мкм для всех вариантов расчета)

4. Время расчета искомых коэффициентов методом коллокации составляет около 0,05 времени расчета интегральным методом наименьших квадратов.

По результатам расчетов можно сделать вывод, что метод коллокации может быть весьма успешно использован при реализации некоторых математических моделей; особенно эффективно его использование в тех случаях, когда речь идет об экономии машинного времени. Конечно, использование метода коллокации при малом числе искомых коэффициентов a_j таит опасность серьезной ошибки, особенно когда отсутствуют дополнительные соображения о выборе координат коллокационных точек. Поэтому в таких случаях необходима контрольная проверка полученных результатов сопоставлением

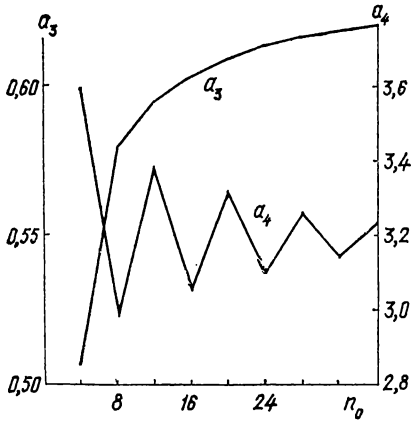

Рис. 38. Зависимость $a_п$ от n_0 для $B = 2$, $\delta_* = 5$ мкм

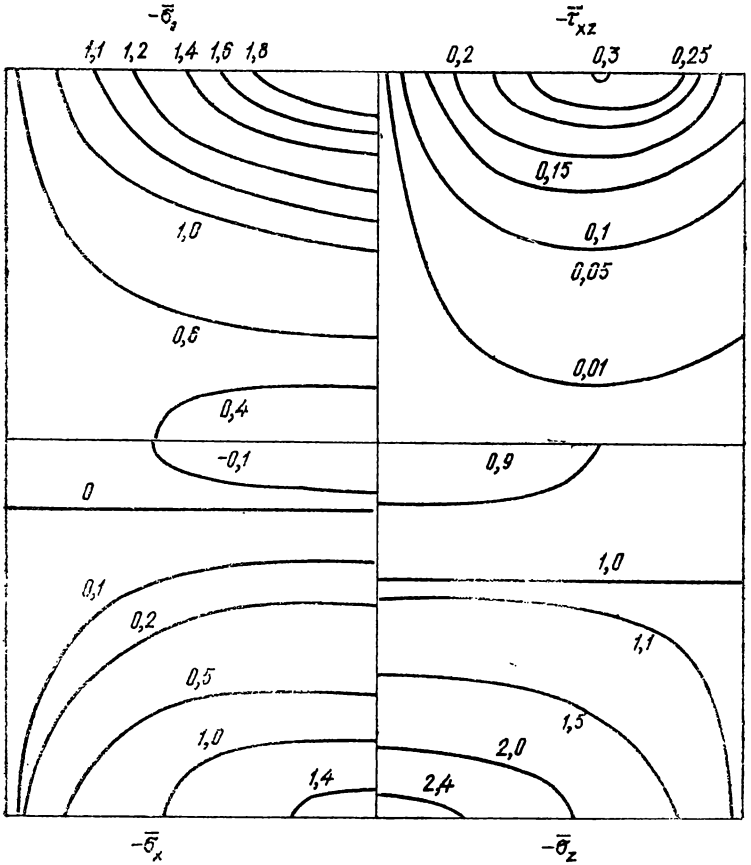

Рис. 39. Расчетные эпюры напряжения

с экспериментальными данными или расчетами по другим методикам.

Метод наименьших квадратов так же может быть эффективно использован при реализации математических моделей, причем его суммарная модификация без особого ущерба для точности расчета дает значительный выигрыш в использовании машинного времени по сравнению с интегральной интерпретацией метода.

Модифицированный метод наименьших квадратов требует значительных затрат машинного времени, но, как уже констатировалось выше, обладает тем неоспоримым преимуществом, что позволяет по уровню размаха a_p искомых коэффициентов a_l оценивать точность аппроксимации. Это свойство, на наш

взгляд, может быть эффективно использовано при анализе малоизученных и сложных (в смысле анализируемого пластического течения и сопровождающей его динамической картины) процессов.

На рис. 39 представлены расчетные картины линий равного уровня безразмерных динамических параметров отклика процесса

$\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{2k}$; $\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{2k}$; $\bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{k}$; $\bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{2k}$ для следующих определяющих параметров процесса деформации $B_* = 1{,}0$; $\delta_* = 5$ мкм; $f_{\text{тл}}^* = 0{,}17$; $a_1 = 0{,}17$; $a_2 = 1{,}87$; $a_3 = -0{,}29$; $a_4 = 3{,}29$; $V = -0{,}1$.

Анализ результатов расчета показал, что разработанная математическая модель достоверно отражает характер изменения исследуемых величин в плоскости поперечного сечения образца.

3. Энергетические методы

По своей математической сути энергетические методы реализации математических моделей процессов ОМД являются разновидностью метода взвешенных невязок. Физическую основу энергетических методов составляет условие эквивалентности дифференциальных уравнений движения и минимума потенциальной энергии системы, основанное на доказательстве [48] об эквивалентности решения уравнения $Lu = u^*$ и решения задачи о минимизации энергетического функционала $2\Phi(u) = (Lu, u) - 2(u^*, u)$.

Рассмотрим один из возможных переходов от задачи о решении системы дифференциальных уравнений (2.12а,б) с соответствующими граничными условиями (2.13)—(2.16), (2.18)—(2.20) к решению задачи о минимизации энергетического функционала.

Предположим, что уравнение (2.12а) тождественно выполняется в области D; тогда справедливы последовательные преобразования

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{v} = 0; \\ &\sigma_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0; \\ &\iiint_D \sigma_0 \operatorname{div} \vec{v}\, dW = 0. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Далее предположим, что уравнение (2.12б) также тождественно выполняется в области D; тогда справедливы после-

довательные преобразования, основанные на использовании уравнения (3.39)[1]:

$$\operatorname{div} T_\sigma = 0;$$
$$\vec{v}\ \operatorname{div} T_\sigma = 0;$$
$$\iiint_D \vec{v} \operatorname{div} T_\sigma dW = 0;$$
$$\iiint_D \sigma_{ik}\dot{e}_{ik} dW - \iint_S \vec{\sigma}_n \vec{v}\, dS = 0. \qquad (3.67)$$

Если входящие в (3.67) компоненты T_σ представляют собой точное решение уравнения (2.12б), удовлетворяющее граничным условиям, справедлива замена $\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}^*_n$, приводящая (3.67) к виду

$$\iiint_D \sigma_{ik}\dot{e}_{ik} dW - \iint_S \vec{\sigma}^*_n \vec{v}\, dS = 0. \qquad (3.68)$$

Просуммируем (3.66) и (3.68)

$$\iiint_D (\sigma_{ik}\dot{e}_{ik} + \sigma_0 \operatorname{div} \vec{v})\, dW - \iint_S \vec{\sigma}^*_n \vec{v}\, dS = 0. \qquad (3.69)$$

Заметим, что для случая идеальной пластичности ($\sigma_{ik}\dot{e}_{ik} = kH$) выражение (3.69) преобразовывается в функционал А. А. Маркова [49].

Пусть вследствие использования приближающих последовательностей вместо точного значения функций σ_0, $\vec{v}$ выражение (3.69) приобретает вид

$$\iiint_D (\sigma_{ik}\dot{e}_{ik} + \sigma_0 \operatorname{div} \vec{v})\, dW - \iint_S \vec{\sigma}^*_n \vec{v}\, dS = \bar{R}. \qquad (3.70)$$

В качестве критерия определения a_j в приближающих последовательностях выдвигаем условие минимизации квадрата невязки ($\bar{R}^2$) в уравнении (3.70)

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\iiint_D (\sigma_{ik}\dot{e}_{ik} + \sigma_0 \operatorname{div} \vec{v})\, dW - \iint_S \vec{\sigma}^*_n \vec{v}\, dS\right]^2 = 0. \qquad (3.71)$$

Из (3.71) следует система уравнений для определения a_j

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\iiint_D (\sigma_{ik}\dot{e}_{ik} + \sigma_0 \operatorname{div} \vec{v})\, dW - \iint_S \vec{\sigma}^*_n \vec{v}\, dS\right] = 0. \qquad (3.72)$$

[1] Инерционными и массовыми составляющими в (2.12 б) для упрощения дальнейших выкладок пренебрегаем.

Для случая идеальной пластичности (3.72) преобразовывается в выражение для реализации функционала А. А. Маркова методом аппроксимирующих функций

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\iiint\limits_D (kH + \sigma_0 \operatorname{div}\vec{v})\, dW - \iint\limits_S \vec{\sigma}_n^* \vec{v}\, dS\right] = 0. \quad (3.73)$$

Если аппроксимирующие функции выбраны так, что условие несжимаемости (2.12а) удовлетворяется, то для случая идеальной пластичности из (3.72) получим выражение, описывающее реализацию функционала вариационного принципа Журдена методом Релея— Ритца [26]:

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\iiint\limits_D kH dW - \iint\limits_S \vec{\sigma}_n^* \vec{v}\, dS\right) = 0. \quad (3.74)$$

Для случая деформации тела со сложными реологическими свойствами из (3.72) получаем выражение, описывающее реализацию функционала принципа минимума полной энергии [50] методом Релея— Ритца:

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\iiint\limits_D \left(\int\limits_0^H T dH\right) dW - \iint\limits_S \vec{\sigma}_n^* \vec{v}\, dS\right] = 0. \quad (3.75)$$

Вполне естественно, что если при прямом переходе от уравнений (2.12а,б) к уравнениям (3.73)—(3.75) использовалась гипотеза о тождественном выполнении граничных условий, то и обратный переход возможен только в том случае, если аппроксимирующие функции, используемые в (3.73)—(3.75), удовлетворяют соответствующим граничным условиям задачи.

Следовательно, идея максимально возможного удовлетворения граничным условиям и рассмотренные выше примеры ее конкретной реализации актуальны и при использовании энергетических функционалов. В этом случае исходные приближающие последовательности на первом этапе подвергаются математической обработке на предмет определения некоторой части аппроксимирующих коэффициентов $a_j (j = \overline{1,m})$ из условия выполнения (точного или приближенного) граничных условий. В результате этой обработки получают опорные аппроксимирующие функции, которые уточняют, определяя оставшуюся часть коэффициентов $a_j (\overline{m,N})$ из условия минимизации соответствующих энергетических функционалов.

4. Метод квазиадекватной модификации уравнения энергетического баланса

Уравнение энергетического баланса применительно к процессам ОМД можно записать в виде [51][1]:

$$\ldots = N_{\text{вн}} = N_a + N_{\text{тр}} = N_{\Phi} = N_{\text{дс}} + N_{\text{и. к. р}} = \ldots, \quad (3.76)$$

где $N_{\text{вн}}$ — мощность привода рабочего инструмента (мощность внешнего источника); N_a — мощность, развиваемая нормальными контактными напряжениями, $N_a = \iint\limits_{S_\tau} pv_n dS$; $N_{\text{тр}}$ — мощность, развиваемая напряжениями внешнего контактного трения, $N_{\text{тр}} = \iint\limits_{S_\tau} \tau_\Delta v dS$; N_{Φ} — мощность формоизменения, $N_{\Phi} = \iiint\limits_{D} \left(\int\limits_0^H T dH \right) dW$; $N_{\text{дс}}$, $N_{\text{и. к. р}}$ — соответственно мощность диссипации и искажения кристаллической решетки (соответственно мощность выделения и накопления энергии); многоточия характеризуют условие сохранения энергии.

Используя второй и третий член уравнения (3.76), получаем запись условия сохранения энергии на одном из этапов ее бесконечных превращений

$$\iiint\limits_{D} \left(\int\limits_0^H T dH \right) dW - \iint\limits_{S_\tau} \tau \Delta v dS = \iint\limits_{S_\tau} pv_n dS. \quad (3.77)$$

В соответствии с принципом Мопертюи из всех возможных состояний системы действительным будет состояние, отвечающее минимуму энергетических затрат. В соответствии с этим процесс деформации должен удовлетворять условию [52]

$$\iiint\limits_{D} \left(\int\limits_0^H T dH \right) dW - \iint\limits_{S_\tau} \tau \Delta v dS = \min, \quad (3.78)$$

так как левая часть выражения (3.77) характеризует энергетические затраты на осуществление процесса обработки давлением.

Как и в предыдущих выкладках, будем рассматривать вариант определения динамических и кинематических параметров формоизменения при использовании метода аппроксими-

[1] Исключительно для уменьшения громоздкости выкладок рассматриваем случай деформации с одним внешним источником энергии: $Q_1^* = Q_2^* = 0$.

рующих функций. Пусть аппроксимирующие функции $v_i(a_j)$ удовлетворяют условию совпадения расчетных и гранично заданных напряжений контактного трения: $\tau = \tau^*$. Тогда условие (3.78) можно представить в виде системы

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\iiint\limits_D \left(\int\limits_0^H TdH\right) dW - \iint\limits_{S_\tau} \tau^* \Delta v dS\right] = 0, \quad j = \overline{1, P}. \quad (3.79)$$

Реализация (3.79) при $P > 4$ связана со значительными математическими трудностями, обуславливаемыми как нелинейностью системы относительно a_j, так и невозможностью проинтегрировать в квадратурах подынтегральные функции из-за их сложности, что предопределяет необходимость решения системы интегральных уравнений.

Рассмотрим вариант приведения (3.79) к безынтегральной форме. Пусть справедливо преобразование

$$\iiint\limits_D \left(\int\limits_0^H TdH\right) dW - \iint\limits_{S_\tau} \tau^* \Delta v dS = \iiint\limits_D \left[\int\limits_0^H TdH - M(\tau^* \Delta v)\right] dW, \quad (3.80)$$

где M — символ модифицирующего оператора, обеспечивающего тождественность преобразования.

Подставляя (3.80) в (3.79), получаем систему

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \iiint\limits_D \left[\int\limits_0^H TdH - M(\tau^* \Delta v)\right] dW = 0, \quad j = \overline{1, P}. \quad (3.81)$$

Потенциал мощности, представляющий собой выражение в квадратных скобках в (3.81), положителен, так как $\int\limits_0^H TdH > 0$; $\vec{\tau}^* \Delta \vec{v} \leqslant 0$ (первое условие следует из физического смысла величины T, второе — из противонаправленности векторов напряжения контактного трения $\vec{\tau}^*$ и относительного скольжения $\vec{\Delta v}$). Исходя из этого, (3.81) тождественно условию

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\int\limits_0^H TdH - M(\tau^* \Delta v)\right] = 0, \quad j = \overline{1, P}. \quad (3.82)$$

В случае, когда использование оператора M вызывает смену знака скалярного произведения $W_\tau = \vec{\tau}^* \Delta \vec{v}$, переход от (3.81) к (3.82) осуществляется на основании утверждения

о единственности состояния системы в условиях минимума энергетических затрат [51]. В соответствии с (3.82) коэффициенты $a_j (j = \overline{1,P})$ определяются методом коллокации из системы алгебраических уравнений, так как интегрирование зависимости $T(H)$ практических трудностей не представляет.

Рассмотрим вариант использования изложенного метода. Пусть требуется определить аппроксимирующий коэффициент a в уравнениях математической модели плоской деформации полосы шероховатыми бойками при использовании исходной приближающей функции вертикальных скоростей в виде уравнения (3.41). Чтобы получить сопоставимые с работой [26] данные, будем использовать одинаковые допущения: $l = k$, $\tau^* = f_{\text{т}}^* k$. Тогда

$$\int_0^H T dH = k \int \sqrt{4\left[\frac{v_6}{h} + a\left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\right]^2 + \left\{\frac{2axz}{b^2h^2}\left[(h^2 - z^2) - (3b^2 - x^2)\right]\right\}^2}. \quad (3.83)$$

Произведем тождественное преобразование выражения мощности напряжений контактного трения в соответствии с условием

$$\int_0^b \tau^* v_x (z = h)\, dx = \int_0^h \int_0^b \tau^* \frac{\partial v_x}{\partial z}\, dx dz. \quad (3.84)$$

Подставляя в (3.84) значение горизонтальной составляющей скорости течения

$$v_x = \left[\frac{v_6}{h} + a\left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right)\right] x, \quad (3.85)$$

с учетом условия (3.82) после соответствующих преобразований получаем

$$a = \frac{\left[3xz\left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right)\frac{f_{\text{т}}}{h^2} - \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\right]\frac{v_6}{h}}{\left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + \frac{x^2z^2(h^2 - z^2)^2}{b^4h^4}\left(1 - \frac{3b^2 - x^2}{h^2 - z^2}\right)^2}. \quad (3.86)$$

Для определения a из (3.86) необходимо назначить координаты точки коллокации. Целесообразно выбрать точку коллокации, руководствуясь условиями ее максимального удаления от осей координат $x^* = b$; $z^* = h$, поскольку для координатных осей кинематические условия течения заданы симмет-

рией рассматриваемой области. После подстановки выбранных значений x^*, z^* в (3.86) получаем

$$a = \frac{f_\tau v_6}{2b}, \tag{3.87}$$

что абсолютно идентично ранее полученному уравнению (3.49), близкая сходимость которого с уравнением (3.44), выведенным в работе [26], была показана ранее (см. рис. 28).

Возможности использования операторов M для квазиадекватной модификации уравнений энергетического баланса в случае деформации многокомпонентных сред рассмотрены в работе [54]. Суть идеи в этом случае сводится к следующему.

Рассмотрим условие минимума полной мощности в виде системы (3.79) для случая деформации $\tilde{n}$-компонентной среды при отсутствии взаимного скольжения на границах областей D_m, выделенных в общем объеме $D = \sum_{m=1}^{n} D_m$ на основании условия непрерывности в каждой из областей D_m функции $T(H)$

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left\{\sum_{m=1}^{\tilde{n}}\left[\iiint_{D_m}\left(\int_0^H T\,dH\right)dW\right] - \iint_{S_\tau}\tau^*\Delta v\,dS\right\} = 0,\ j = \overline{1, P}. \tag{3.88}$$

Преобразуем (3.88) к виду

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\iiint_D\left[\int_0^H M_1(T)\,dH - M(\tau^*\Delta v)\right]dW = 0. \tag{3.89}$$

В качестве оператора M_1, обеспечивающего квазиадекватность преобразования (3.88) в (3.89), можно использовать, например, преобразование

$$M_1(T) = T_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{t}} \lambda_i^{\psi_i}\Delta T_i, \tag{3.90}$$

где T_0 — реологическое уравнение для области, принятой за базовую; $\tilde{t}$ — число областей с отличными от базовой области свойствами, $\tilde{t} = \tilde{n} - 1$; λ_i, ψ_i — некоторые функции координат, либо постоянные, определяющие степень приближения непрерывной функции $M_1(T)$ к дискретной функции $T_m(W)$; ΔT_i — скачки функции $T_m(W)$ на границах слоев.

Рассмотрим пример конкретного оператора M_1. Для простоты будем считать материал в каждой из двух областей (рис. 40) идеально пластичным: $T_1 = k_1$; $T_2 = k_2$. Пусть

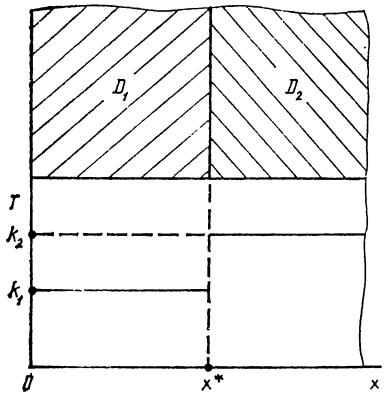

Рис. 40. Схема двухкомпонентной области

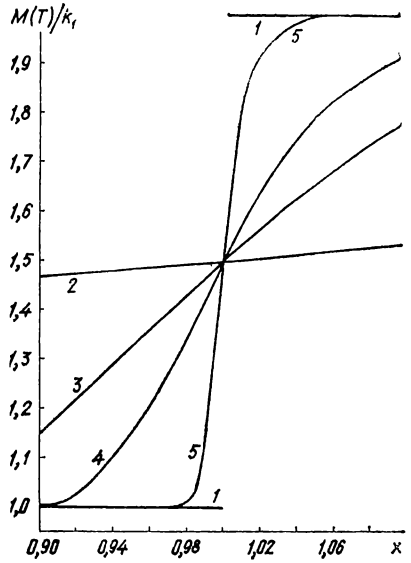

Рис. 41. Исходная (*1*) и модифицированные (*2—5*) функции: *2* — $b_м = 1$; *3* — $b_м = 10$; *4* — $b_м = 20$; *5* — $b_м = 10^3$

$D_1[0 \leqslant x \leqslant x^*]$, $D_2[x^* < x < \infty]$, тогда можно использовать преобразование

$$M_1(T) = \left\{1 + \Delta\bar{k} C_м^{\exp[b_м(1-\bar{x})]}\right\} k_1, \qquad (3.91)$$

где $C_м$, $b_м$ — коэффициенты модификации; $\bar{x} = \frac{x}{x^*}$; $\Delta\bar{k} = \frac{k_2 - k_1}{k_1}$.

Значение коэффициента $C_м$ можно определить из условия

$$M_1(T)|_{\bar{x}=1} = k^*.$$

Пусть $k^* = 0{,}5(k_1 - k_2)$, тогда $C_м = 0{,}5$. На рис. 41 приведены графики зависимости

$$\frac{M_1(T)}{k_1} = 1 + 0{,}5^{\exp[b_м(1-\bar{x})]}\Delta\bar{k} \qquad (3.92)$$

для различных значений коэффициента $b_м$ при $\Delta\bar{k} = 1$. Как следует из приведенных данных, по мере увеличения $b_м$ непрерывная функция (3.92) практически совпадает с функцией

$$\frac{T}{k_1} = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant 1; \\ 2 \text{ при } 1 < \bar{x} < \infty. \end{cases} \qquad (3.93)$$

Практически в качестве операторов M_1 можно использовать также δ-функцию Дирака, единичную функцию Хевисайда и другие специальные функции [55, 56].

5. Алгоритмы обработки экспериментальных данных

Под экспериментом в широком смысле этого понятия подразумевают создание некоторого комплекса условий $\mathfrak{A}$, в результате которых могут наступать или не наступать события из некоторого множества $\mathfrak{B}$ [57]. Под экспериментальным исследованием некоторого явления можно понимать его изучение непосредственно на реальном объекте или физической модели (эмпирическое изучение) или его изучение методами математического моделирования (имитационные эксперименты). В случае, когда комплекс условий $\mathfrak{A}$ поддается регулировке посредством параметра ξ так, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\xi)$, эксперимент называют планируемым или активным, а параметр $\xi \in \Xi$ — планом эксперимента (здесь ξ_0— некоторое множество условий). План ξ_0, отвечающий условию

$$\xi_0 = \arg \inf_{\xi \in \Xi} З(\xi), \tag{3.94}$$

где З — некоторый показатель, характеризующий материальные затраты на проведение эксперимента, называют оптимальным планом по отношению к З [57].

В случае, когда $\mathfrak{A}$ не поддается регулировке либо

$$З(\xi_0) > З^* \tag{3.95}$$

($З^*$— максимально допустимый уровень материальных затрат на проведение эксперимента), возможен набор дискретных статистик $У_к = У_к(\mathfrak{A}_к)$, отвечающий условиям пассивного эксперимента ($У_к$— комплекс изучаемых параметров отклика, соответствующий конкретному сочетанию $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_к$).

Цель статистической обработки экспериментальных данных — получение достоверной математической модели, идентифицирующей с заданной точностью изучаемый процесс. Когда обработке подвергаются эмпирические данные, в ее результате получают математическую модель типа ЭММ. Когда для упрощения представления конечных результатов расчета обрабатывают информацию, полученную в ходе реализации сложной АММ на ЭВМ, можно говорить о создании модели по модели; такие модели будем называть имитационно-аналитическими (ИАММ).

Преимущества и недостатки активного и пассивного экспериментов при изучении процессов ОМД рассмотрены в гл. 1. Рассмотрим некоторые из возможных вариантов обработки экспериментальной информации в виде набора дискретных статистик $У_к = У_к(\mathfrak{A}_к)$ для получения математических моделей в виде непрерывных связей $У = У(\mathfrak{A})$.

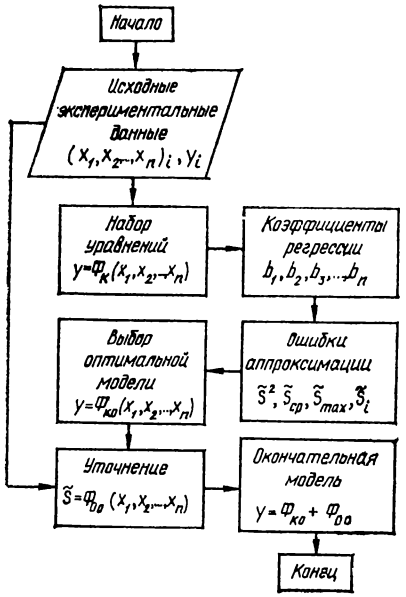

Рис. 42. Блок-схема алгоритма обработки случайных экспериментальных данных

Качество аппроксимации данных пассивного эксперимента зависит в основном от выбора вида аппроксимирующего уравнения. В литературе [58, 59] приводятся наиболее употребимые аппроксимирующие уравнения, выбор каждого из которых в качестве подходящего аргументируется априорно по внешнему виду распределения статистик в анализируемом интервале. Естественно, что полученные таким образом аппроксимирующие уравнения зачастую не удовлетворяют принятым критериям точности модели. В работе [60] предложен алгоритм обработки случайных эмпирических данных на ЭВМ (рис. 42), в котором одновременно осуществляется аппроксимация несколькими математическими моделями $\Phi_к$ и производится выбор оптимальной (с точки зрения качества аппроксимации по «наименьшим квадратам») модели $\Phi_{к0}$ («нулевая» модель). Полученную модель $\Phi_{к0}$ уточняют, представляя ошибку расчета по $\Phi_{к0}$ в виде функции $\Phi_{0в}$ от определяющих параметров X, которой дополняют первоначально полученную модель $\Phi_{к0}$. В результате имеют окончательную модель $У = \Phi_{к0} + \Phi_{0в}$. Такой алгоритм эффективен для обработки эмпирических данных, полученных при относительно небольших интервалах варьирования определяющих параметров.

Развивая идеи, использованные при создании описанного выше алгоритма, рассмотрим метод обработки экспериментальных данных, блок-схема алгоритма которого приведена на рис 43[1]. Суть метода состоит в пошаговом усложнении аппроксимирующего уравнения и уточнении значений входящих в него аппроксимирующих коэффициентов; при этом алго-

[1] Алгоритм разработан М. З. Володарским при участии Э. А. Максимовой и А. Г. Карпова под научным руководством Ю. Г. Гуляева.

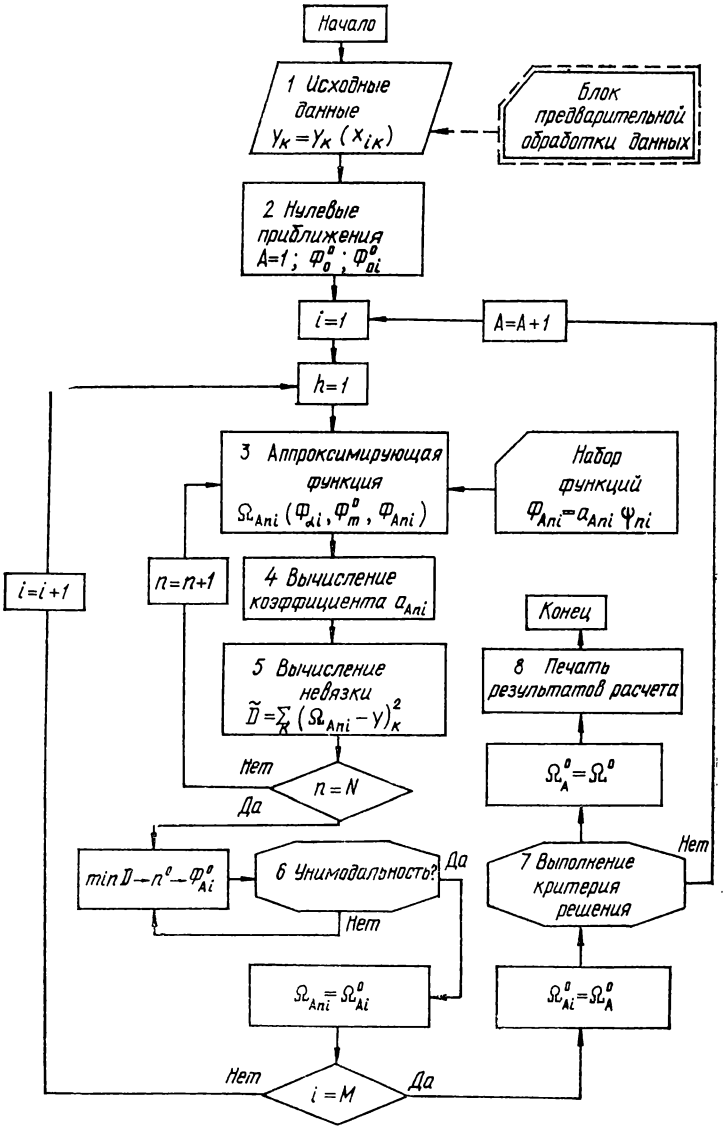

Рис. 43. Блок-схема усовершенствованного алгоритма

ритм построен так, что на каждом шаге решения необходимо определить лишь один аппроксимирующий коэффициент, это предельно упрощает вычисления.

Алгоритм предлагаемого метода имеет следующую структуру. Экспериментальные данные о значениях исследуемой характеристики (параметра отклика) y некоторого объекта исследования, сведенные в таблицу вида $y_к = y_к(x_{ik})$, где к = = 1, 2, ..., K — порядковый номер точки наблюдения; к — общее число точек наблюдения; x_i — фактор (определяющий параметр) с порядковым номером i ($i = 1, 2, ..., M$), вводится в блок *1*. При этом возможна предварительная обработка экспериментальных данных с целью определения их статистических характеристик (дисперсия, среднеквадратичное отклонение, проверка нормальности распределения и т. д.). Аппроксимирующая функция M-мерной гиперповерхности отклика для каждого n-го шага, i-го цикла, A-го этапа решения строится в виде многочлена

$$\Omega_{Ani} = G^0_{A-1} + G^0_{A,\,i-1} + \Phi_{Ani}, \qquad (3.96)$$

где G^0_{A-1} — сумма оптимальных (в смысле минимизации суммы квадратов невязки $\tilde{R}^2 = \tilde{D}$) функций, значения аппроксимирующих коэффициентов a^0_{Ani} которых были получены на предыдущих $A-1$ этапах расчета, $G^0_{A-1} = \sum_{\alpha=0}^{A-1} \sum_{i=1}^{M} \Phi_{\alpha i}$; $G^0_{A,\,i-1}$ — сумма оптимальных функций, значения a^0_{Ani} которых были получены на предыдущих циклах $i-1$-го этапа расчета, $G^0_{A,\,i-1} = \sum_{m=0}^{i-1} \Phi^0_m$; Φ_{Ani} — уточняющая для n-го шага функция, $\Phi_{An:} = a_{Ani}\psi_{ni}$, ψ_{ni} — заранее заданная функция (брик-функция) i-го фактора, сведения о которой содержатся в отдельном блоке программы; n — порядковый номер брик-функции, характеризующий ее математическое описание $n = 1, 2, \ldots, N$; N — общее число анализируемых брик-функций.

На каждом i-м цикле расчета последовательно по методу наименьших квадратов определяют значения N аппроксимирующих коэффициентов для N соответствующих брик-функций

$$a_{Ani} = \{\sum_{к=1}^{K} [(y - G^0_{A-1} - G^0_{A,\,i-1})\psi_{ni}]_к\}[\sum_{к=1}^{K} (\psi^2_{ni})_к]^{-1} \qquad (3.97)$$

и находят оптимальный вид уточняющей функции Φ^0_{Ai} из

условия минимальности суммы квадратов невязки

$$\tilde{D} = \sum_{\kappa=1}^{K} (y - G^0_{A-1} - G^0_{A,\,i-1} - \Phi^0_{Ai})^2_{\kappa} = \min. \qquad (3.98)$$

При этом Φ^0_{Ai} не должна нарушать унимодальности Ω^0_{Ai}, для чего в блоке 6 осуществляется проверка выполнения условия: $\partial\Omega^0_{Ai}/\partial x_i = 0$ единожды в рассматриваемом интервале. Критерии окончания расчета могут быть различными. Например, можно использовать условие [61]

$$\tilde{S}^2 = \sqrt{\frac{\sum_{\kappa=1}^{K} (y - \Omega^0)^2_{\kappa}}{K-1}} \leqslant \tilde{S}^2_*, \qquad (3.99)$$

где $\tilde{S}^2_*$ — заданная средним квадратичным отклонением мера точности аппроксимации.

Рассмотрим пример решения тестовой задачи с использованием предложенного метода. Пусть получены следующие сочетания эмпирических значений $x_{1\kappa}$ и y_κ: $x_{11} = 0$, $y_1 = 1$; $x_{12} = 1$, $y_2 = 3$; $x_{13} = 2$, $y_3 = 7$; $x_{14} = 3$; $y_4 = 13$; $x_{15} = 4$; $y_5 = 21$. Используем при аппроксимации следующий набор брик-функций: $\psi_{1i} = 1$; $\psi_{2i} = x_1^{0,5}$; $\varphi_{3i} = x_1$; $\psi_{4i} = x_1^{1,5}$; $\psi_{5i} = x_1^2$. Результаты расчета представлены в табл. 6.

Тот факт, что на каждом шаге расчета определяется лишь один аппроксимирующий коэффициент, предопределяет высокую скорость решения задачи на ЭВМ, простоту формализации решения, возможность использования весьма большого числа различных брик-блоков (реально $N = 500$ и более) и высокую точность аппроксимации. В приведенном примере за $A = 6$ этапов решения достигается точность $\tilde{S}^2 = 0{,}463$ (время счета на ЭВМ ЕС-1033 составляет $t = 6$ с). Для $A = 61$ соответственно получаем $\tilde{S}^2 = 0{,}024$, $t = 64$ с.

Блочная структура программы реализации описанного алгоритма предопределяет возможности его дальнейшего совершенствования. Так, например, был введен блок отсева определяющих параметров с малым возбуждением. Смысл отсева состоит в следующем. После определения на данном A-м этапе решения коэффициентов a^0_{An} и соответствующей оптимальной функции Ω^0_A аппроксимирующие коэффициенты, полученные на предыдущих этапах расчета поочередно приравнивают нулю. Если при замене какого-либо коэффициента на нуль точность аппроксимации не ухудшается по отношению к точности на $(A - 1)$-м этапе, коэффициент в дальнейших рас-

Таблица 6. **Пошаговые результаты аппроксимации**

A	n	a_{An1}	D	n^0	$\Omega_A^0 = G_{A+1}$	$\tilde{S}^2(\Omega_A^0)$
1	1	9,000	264,000	4	$2{,}583x_1^{1,5}$	0,624
	2	7,742	69,674			
	3	4,667	15,667			
	4	2,583	1,558			
	5	1,367	7,260			
2	1	0,205	1,348	1	$0{,}205 + 2{,}583x_1^{1,5}$	0,580
	2	$-7{,}384 \cdot 10^{-3}$	1,558			
	3	$-3{,}855 \cdot 10^{-3}$	1,558			
	4	0	1,558			
	5	$2 \cdot 10^{-3}$	1,556			
3	1	0	1,348	2	$0{,}205 - 0{,}133x_1^{0,5} + 2{,}583x_1^{1,5}$	0,541
	2	$-0{,}133$	1,170			
	3	$-0{,}072$	1,191			
	4	$-0{,}44 \cdot 10^{-2}$	1,229			
	5	$-1{,}52 \cdot 10^{-2}$	1,266			
4	1	0,164	1,036	1	$0{,}369 - 0{,}133x_1^{0,5} + 2{,}583x_1^{1,5}$	0,509
	2	0	1,170			
	3	$3{,}288 \cdot 10^{-3}$	1,170			
	4	$5{,}489 \cdot 10^{-3}$	1,167			
	5	$5{,}677 \cdot 10^{-3}$	1,160			
5	1	0	1,036	2	$0{,}369 - 0{,}234x_1^{0,5} + 2{,}583x_1^{1,5}$	0,483
	2	$-0{,}101$	0,934			
	3	$-5{,}138 \cdot 10^{-2}$	0,957			
	4	$-2{,}243 \cdot 10^{-2}$	0,986			
	5	$-8{,}702 \cdot 10^{-3}$				
6	1	0,124	0,857	1	$0{,}493 - 0{,}234x_1^{0,5} + 2{,}583x_1^{1,5}$	0,463
	2	0	0,934			
	3	$5{,}937 \cdot 10^{-3}$	0,933			
	4	$7{,}869 \cdot 10^{-3}$	0,927			
	5	$6{,}774 \cdot 10^{-3}$	0,917			

четах считают равным нулю. Так для рассмотренного тестового примера

$$\Omega_{51}^0 = 0{,}984 - 0{,}004x_1^{0,5} + 1{,}011x_1 + 0{,}002x_1^{1,5} + 0{,}994x_1^2;$$

$$\tilde{S}^2(\Omega_{50}^0) = 0{,}042;$$

$$\tilde{S}^2(0{,}984 + 1{,}011x_1 + 0{,}994x_1^2) = 0{,}041 < \tilde{S}^2(\Omega_{50}^0),$$

что в соответствии с принципом отсева дает $\Omega_{51}^0 = 0{,}984 + 1{,}011x_1 + 0{,}994x_1^2$.

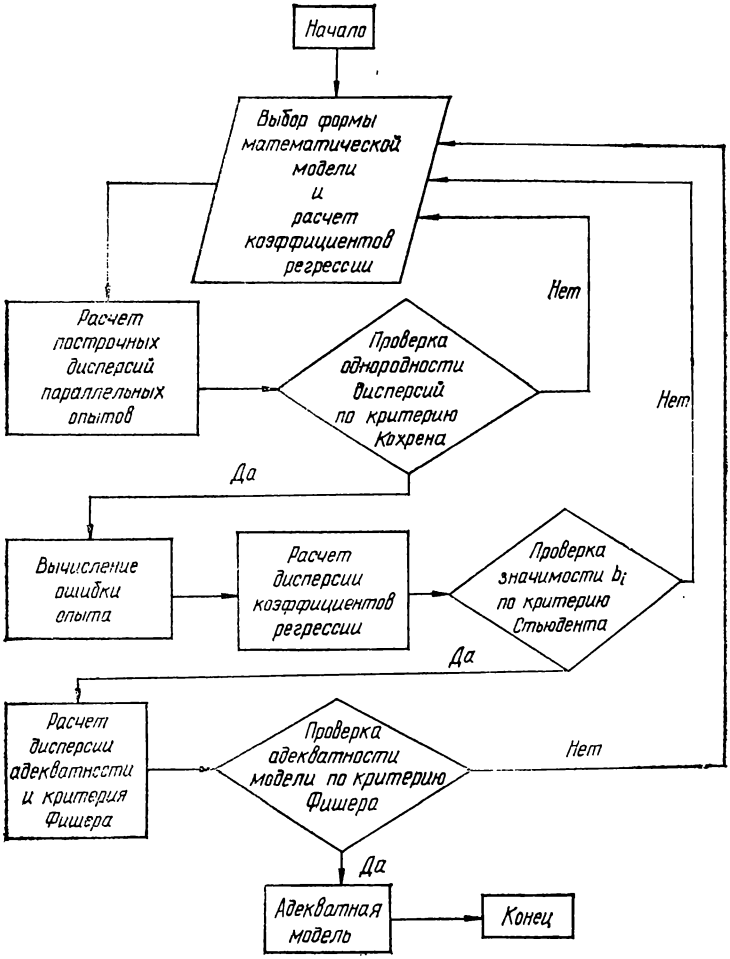

Рис. 44. Блок-схема алгоритма обработки результатов факторных экспериментов

Использование блока отсева значительно сокращает число членов окончательной модели практически не снижая ее точности.

Обработка экспериментальных данных, полученных в ходе активных экспериментов, относительно просто поддается алгоритмизации, принципы которой рассматривались в целом ряде работ, например [62]. На рис. 44 приведена блок-схема алгоритма, использованного для статистической обработки результатов активных экспериментов [63].

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОМД

Глава четвертая

ПРЕССОВАНИЕ

1. Общая АММ процесса

Широкое промышленное использование процессов прессования в различных модификациях базируется на целом ряде физических особенностей и технологических преимуществ перед другими способами ОМД, в частности, прокаткой.

1. При прессовании в очаге деформации преимущественно имеет место схема напряжений всестороннего сжатия, наиболее благоприятная с точки зрения повышения показателей деформируемости. Это обеспечивает высокую пластичность обрабатываемого металла, позволяет производить значительную деформацию низкопластичных материалов за один цикл обработки и служит физической основой для формоизменения заготовок, разрушающихся в ходе других процессов ОМД.

2. На прессовых установках можно получать изделия весьма сложной конфигурации, изготовление которых невозможно прокаткой.

3. Пресс как технологическое оборудование весьма гибок, что позволяет осуществлять смену типоразмеров производимых изделий в течение нескольких минут. Эта особенность делает процесс экономически выгодным при производстве малотоннажных партий.

4. Прессованные изделия имеют весьма высокое качество поверхности; их отличает однородность структуры и механических свойств по сечению и длине.

5. Изделия, полученные прессованием, характеризуются высокой точностью геометрических размеров и их низкой дисперсией как по сечению, так и по длине.

6. Материальные затраты на обслуживание и эксплуатацию прессовых установок относительно невысоки.

Наряду с положительными аспектами процесс прессования имеет некоторые характерные недостатки, которые ограничивают область его применения; среди них основными являются следующие: невысокая стойкость рабочего инструмента, обусловленная его работой в тяжелых условиях (высокие температуры и значительные контактные напряжения); большие расходные коэффициенты металла, значения которых в первую очередь определяются относительно высоким уровнем концевой обрези. Устранение указанных недостатков возможно путем выбора оптимальных технологических параметров прессования, включая калибровку матриц.

Принципиально процесс прессования биметаллов характеризуется по сравнению с другими процессами ОМД теми же преимуществами, что и процесс прессования монометаллов. Схемы технологических процессов прессования биметаллов и монометаллов практически аналогичны. Однако при деформации биметалла имеются некоторые характерные особенности, в силу которых возникают специфические проблемы и ограничения, отсутствующие при прессовании монометаллов труб. Из проблем, возникающих при прессовании биметаллов, основными являются [64] продольная разнотолщинность и расслоение металлов на передних концах труб вследствие преимущественного истечения одного из компонентов биметаллической пары в начальной стадии прессования; специфические требования к точности труб и связанные с ними технологические проблемы и требования к точности заготовок, обусловленные тем, что условия приемки продукции оговаривают не только допустимые пределы колебаний внешнего диаметра и толщины стенки (внутреннего диаметра) относительно их номинальных значений, но и параметры точности по толщине плакирующего слоя (граничному диаметру); проблемы, связанные со взаимодействием компонентов биметаллической пары (особенно при температурах горячей деформации), а также с устранением последствий указанного взаимодействия и его предотвращением.

Оптимизация процесса прессования, в том числе прессования биметаллических изделий, может базироваться на следующих группах научно-технических разработок: выбор оптимальных температурных, деформационных и скоростных параметров процесса; оптимальных геометрических параметров деформирующего инструмента; оптимальных параметров геометрических размеров заготовки; оптимальных размеров концевой обрези; подбор смазок с наиболее благоприятным сочетанием свойств; совершенствование конструкций прессов.

Основными критериями оптимизации процесса являются минимизация энергосиловых параметров процесса деформации;

повышение разовых деформаций и, как следствие, производительности; точность геометрических размеров труб; минимизация концевой обрези; прочное и качественное соединение слоев биметаллической пары, отсутствие разрушений в слоях (при деформации биметаллов).

Практически решение комплексной задачи оптимизации осуществляется экспериментальными методами исследования, разработкой аналитических математических моделей и статистическим изучением параметров процесса. Ниже приведены материалы исследований в рамках двух последних из указанных методов.

Теоретическому изучению процесса прессования посвящено множество научных работ. Проанализируем некоторые из тех математических моделей, в которых проводится совместный анализ напряженного и деформированного состояния при прессовании цилиндрических изделий (прутков и труб).

В работах [65, 67] принято допущение, согласно которому в очаге деформации соблюдается плоское осевое течение. Такое допущение явно искажает истинную картину, так как при прессовании имеет место значительный перепад в скорости осевого течения металла между точками, контактирующими с деформирующим инструментом, и точками, находящимися в объеме (центральных слоях) заготовки [65, 68, 69]. В работах [65, 66, 70] используется гипотеза полной пластичности (гипотеза Г. Генки) в интерпретации $\dot{e}_r = \dot{e}_\Theta$ [65, 66] и $\dot{e}_z = \dot{e}_\Theta$ [70], что является явным упрощающим допущением [71].

Особо следует отметить, что ни в одной из известных нам работ в качестве граничных условий не ставится условие необходимости соответствия полученных расчетным путем контактных напряжений сдвига и напряжений внешнего контактного трения, заданных через показатели или коэффициент трения.

Описанные выше допущения приводят не только к количественному, но и качественному отличию расчетных и реальных параметров. Так, например, в работах [65, 66] расчетная картина течения такова, что отношение радиальной и осевой составляющих скорости течения на контакте с матрицей всегда равно единице ($v_r/v_z = 1$). Это означает, что при угле конусности матрицы $\alpha_м$, меньшем 45°, металл отходит от поверхности матрицы, а при $\alpha_м > 45°$ — вдавливается в матрицу. В [70] расчетное поле осевых скоростей таково, что в центре прутка металл в направлении прессования движется медленнее, чем на контактной поверхности; это явно противоречит как закону наименьшего сопротивления, так

и общеизвестным экспериментальным данным. В [72] расчетное поле скоростей таково, что радиальная составляющая $\bar{v}_r$ скорости течения на стенке контейнера не равна нулю, т. е. металл отрывается от стенки контейнера.

Наиболее полно в общетеоретическом плане задача о прессовании решена в работах [4, 69], однако при анализе конкретных практических задач возникает целый ряд математических трудностей, обусловленных физическими особенностями реальных процессов. Поэтому до настоящего времени в литературе отсутствуют однозначные обобщающие рекомендации по выбору оптимальных технологических параметров процесса.

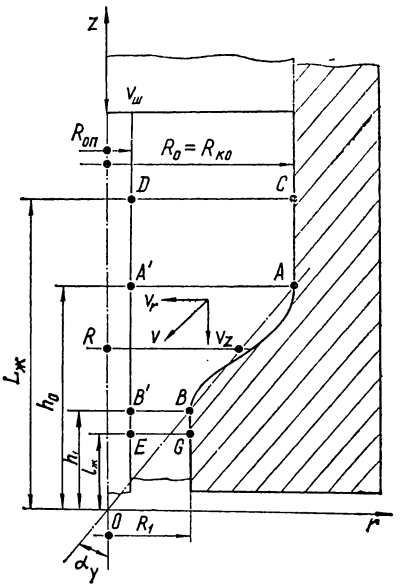

Рис. 45. Схема процесса прессования

В следующих ниже выкладках сделана попытка получить математическую модель процесса прессования цилиндрических прутков и труб, которая наиболее полно соответствует физическим граничным условиям процесса. Основной целью предлагаемой разработки является получение обобщающих практических рекомендаций по выбору оптимальных параметров прессования. При разработке математической модели нами использован значительный опыт, накопленный в результате анализа процессов пластического формоизменения целым рядом исследователей [4, 6, 8, 10, 31, 32, 68].

Разработка физической модели, граничные условия. Принимаем следующую физическую модель прессования цилиндрических труб (рис. 45), частным случаем которой является модель прессования цилиндрических прутков. Под действием прессштемпеля, движущегося со скоростью $v_ш$, заготовка выпрессовывается из контейнера через отверстие, внешняя образующая которого ограничена матрицей переменного по высоте (ось $\bar{Z}$) радиуса R, а внутренняя — оправкой постоянного по высоте радиуса $R_{оп}$ (при прессовании прутка $R_{оп} = 0$). Задний торец заготовки движется со скоростью $v_0 = v_ш$. В объеме выше плоскости DC материал заготовки находится в упруго-деформированном состоянии, деформации малы по

сравнению с деформациями в зоне пластического формоизменения, и можно принять, что

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0. \tag{4.1}$$

В объеме, ограниченном плоскостями CD, EG и контуром инструмента, происходит пластическое формоизменение заготовки. При этом плоскости CA (контейнер) и BG (калибрующий поясок матрицы) параллельны оси прессования Z. На участке AB (матрица) происходит обжатие заготовки; профиль участка AB может быть произвольно задан функцией $R = R(z)$.

Из сказанного следует, что условие раздела зон пластического формоизменения и упругого сжатия принято в виде плоских поверхностей. Экспериментальные [65, 66, 69, 73] и теоретические [69] исследования показали, что зона раздела в контейнере расположена между поверхностями, ограниченными плоскостью CD и сферической поверхностью радиуса OC, а зона раздела на выходе расположена ниже конического участка матрицы. В общем случае, конечно, имеет место условие связи $L_ж = L_ж(r)$, $l_ж = l_ж(r)$ (здесь $L_ж$, $l_ж$ — расстояния до поверхностей раздела соответственно жесткой и пластической областей и контейнере и на выходе), однако допущение о постоянстве величин $L_ж$ и $l_ж$ по радиусу, на наш взгляд, вполне допустимо как близкое к истине. Аналогичное допущение с успехом использовали другие исследователи [65, 73].

Принятая физическая модель накладывает в виде граничных условий следующие ограничения на ММ процесса прессования.

1. В соответствии с положениями теории разрывных полей механики сплошной среды осевая скорость течения и деформации не должны иметь разрывов [26, 71]. Следовательно, в плоскостях CD и EG должно выполняться условие

$$v_z\Big|_{CD} = v_0; \tag{4.2а}$$

$$v_z\Big|_{EG} = v_1; \tag{4.2б}$$

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\Big|_{\substack{CD,\\EG}} = 0. \tag{4.2в}$$

Принимаем также условие отсутствия разрыва скоростей радиального течения v_r на границах области пластического течения и внешних недеформируемых зон

$$v_r\Big|_{CD} = v_r\Big|_{EG} = \frac{\partial v_r}{\partial r}\Big|_{CD} = \frac{\partial v_r}{\partial r}\Big|_{EG} = 0. \tag{4.3}$$

В соответствии с (4.2а—в), (4.3) на границах зоны пластического течения отсутствуют линейные скорости деформаций $e_к$ и интенсивность скоростей сдвиговых деформаций определяется значением компоненты $\gamma_{rz} = \partial v_r/\partial z$ тензора скоростей деформаций

$$H^г = \dot{\gamma}^г_{rz} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^г \tag{4.4}$$

(индекс «г» указывает на принадлежность элемента к границам очага деформации плоскостям CD и EG).

2. На контакте с рабочим инструментом металл скользит по поверхностям оправки, матрицы и контейнера; математическая запись этого физического ограничения имеет вид

$$\left.\frac{v_r}{v_z}\right|_{r=R_i} = \frac{\partial R_i}{\partial z} = \alpha_i', \tag{4.5}$$

где $R_i(z)$ — текущее значение радиусов оправки, контейнера, матрицы.

3. Кинематические параметры течения связаны с гранично заданной скоростью прессования $v_ш$ условием постоянства секундных объемов

$$v_ш (R^2_ш - R^2_{оп}) = 2 \int_{R_{оп}}^{R} v_z r\, dr. \tag{4.6}$$

Введение условия (4.6) позволяет анализировать процесс при больших деформациях с гарантированным выполнением условия несжимаемости.

4. При прессовании прутков, в соответствии с условиями симметрии, на оси Z отсутствуют сдвиговые деформации [74]

$$\dot{\gamma}_{rz}\Big|_{r=0} = 0, \tag{4.7}$$

а также соблюдается условие [71]

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)_{r=0} = 0. \tag{4.8}$$

Учитывая, что напряжения и скорости деформации связаны соотношением (2.9), из (4.7), (4.8) получаем

$$\tau_{rz}\Big|_{r=0} = 0; \tag{4.9}$$

$$(\dot{e}_r - \dot{e}_\theta)_{r=0} = 0, \tag{4.10}$$

а из (4.4) —

$$\sigma^г_r = \sigma^г_z = \sigma^г_\theta = \sigma^г_0, \tag{4.11}$$

где $\sigma^г_0$ — гидростатическое напряжение на границах зоны пластического течения.

5. На выходе из очага деформации (плоскость EG) гидростатическое напряжение равно напряжению от внешнего воздействия $\sigma_{вн}$ и постоянно по радиусу; при отсутствии противодавления или натяжения $\sigma_0\big|_{EG} = \sigma_{вн} = 0$.

Приближающие функции кинематических параметров. Принимаем функцию распределения осевых скоростей течения в зоне пластической деформации в виде

$$\bar{v}_z = \frac{(1-\lambda^2)(a_1-\bar{z})^2(\bar{z}-a_2)^2}{\bar{R}^2-\lambda^2}[A + (a_3 + a_4\bar{r}^2)\bar{r}^2], \quad (4.12)$$

где $\bar{v}_z = \frac{v_z}{v_0}$; $\bar{R} = \frac{R}{R_0}$; $\bar{z} = \frac{z}{R_0}$; $\bar{r} = \frac{r}{R_0}$; $\lambda = \frac{R_{оп}}{R_0}$; a_j — постоянные коэффициенты, $j = n = \overline{1,4}$; $A = A(z)$ — функция, обеспечивающая тождественное выполнение условия (4.6).

Подставляя (4.12) в (4.6), после соответствующих преобразований получаем

$$A = [(a_1-\bar{z})(\bar{z}-a_2)]^{-2} - \frac{(\bar{R}^2+\lambda^2)a_3}{2} - \frac{(\bar{R}^6-\lambda^6)a_4}{3(\bar{R}^2-\lambda^2)}. \quad (4.13)$$

С учетом (4.13) уравнение (4.12) принимает вид

$$\bar{v}_z = \frac{1-\lambda^2}{\bar{R}^2-\lambda^2}\left\{1 + \left[\left(\bar{r}^2 - \frac{\bar{R}^2+\lambda^2}{2}\right)a_3 + \left(\bar{r}^4 - \frac{\bar{R}^4+\bar{R}^2\lambda^2+\lambda^4}{3}\right)a_4\right](a_1-\bar{z})^2(\bar{z}-a_2)^2\right\}. \quad (4.14)$$

Из (4.14) определим кинематические параметры рассматриваемого осесимметричного течения

$$\dot{e}_z = \frac{v_0}{R_0}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}}; \quad (4.15а)$$

$$\bar{v}_r = \frac{-1}{\bar{r}}\int_{\lambda}^{\bar{R}} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}}\bar{r}\,d\bar{r}; \quad (4.15б)$$

$$\dot{e}_\theta = \frac{v_0\bar{v}_r}{R_0\bar{r}}; \quad (4.15в)$$

$$\dot{e}_r = -\frac{v_0}{R_0}\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{v}_r}{\bar{r}}\right); \quad (4.15г)$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{v_0}{R_0}\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \bar{z}}\right). \quad (4.15д)$$

Уравнения (4.14), (4.15 а—д) тождественно удовлетворяют всем кинематическим граничным условиям, рассмотренным

выше. При этом по своему физическому смыслу коэффициенты a_1, a_2 отвечают условию

$$a_1 = \bar{L}_{\text{ж}}; \quad a_2 = \bar{l}_{\text{ж}},$$

где L, l — симплексы осевых координат $L_{\text{ж}}$ и $l_{\text{ж}}$ положения плоскостей CD и EG соответственно, $\bar{L} = \frac{L_{\text{ж}}}{R_0}$; $\bar{l} = \frac{l_{\text{ж}}}{R_0}$.

Постоянные коэффициенты $a_j = a_n$, $j = 1 \div 4$, входящие в уравнения (4.14), (4.15), определяли из условия совпадения расчетных и гранично заданных показателей трения $f_{\text{тп}}$ в четырех точках контактной поверхности. Сформулированное условие приводит к системе уравнений

$$\left\{\frac{1}{H}\left[2\left(\dot{e}_r - \dot{e}_z\right)\sin\alpha_i' \cos\alpha_i' + \dot{\gamma}_{rz}\left(\cos^2\alpha_i' - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \sin^2\alpha_i'\right)\right]\right\}_{r=R_n^*,\ z=z_n^*} = f_{\text{тп}}^*; \qquad (4.16)$$

где $n = 1 \div 4$ — индекс соответствующий следующим условиям: $n = 1$ на контакте металла с матрицей в начале матричной воронки; $n = 2$ на контакте металла с матрицей в конце матричной воронки; $n = 3$ на контакте металла с оправкой в середине матричной воронки; $n = 4$ на контакте металла с поверхностью контейнера при $z_4^* = 0{,}5\ (L_{\text{ж}} + h_0)$ (см. рис. 45).

Таким образом, кинематические параметры v_i, $\dot{e}_{i\text{к}}$ определены из условия выполнения заданных граничных условий.

Динамические параметры процесса $\sigma_{i\text{к}}$, σ_0 определим из условия соблюдения дифференциальных уравнений движения в зоне пластического формоизменения.

Зададим приближающее уравнение для средних гидростатических напряжений в виде, удовлетворяющем сформулированным граничным условиям и условию симметрии относительно оси $\bar{Z}$

$$\sigma_0 = \sigma_{\text{вн}} + (\bar{z} - a_2)\left(a_5 + a_6\bar{z} + a_7\bar{r}^2\right)\frac{2T}{H}. \qquad (4.17)$$

Значения постоянных коэффициентов $a_j (j = m = 5 \div 7)$ определяли модифицированным методом наименьших квадратов, суть которого изложена в гл. 3. Интенсивность сдвиговых напряжений определяли в соответствии с зависимостью (2.28). Вследствие того, что коэффициенты a_n были определены ранее, система уравнений для поиска коэффициентов a_m оставалась линейной относительно искомых коэффициентов независимо от вида связи (2.28).

Величину Λ, входящую в (2.28), определяли решением отдельной системы уравнений

$$\tilde{r}(\bar{z}) = \int_{\bar{L}_{\text{ж}}}^{\bar{z}} \frac{\bar{v}_r(\tilde{r}, \bar{z})}{\bar{v}_z(\tilde{r}, \bar{z})} d\bar{z} + \bar{\rho}_0; \qquad (4.18а)$$

$$\Lambda = \frac{R_0}{v_0} \int_{\bar{L}_{\text{ж}}}^{\bar{z}} \frac{H(\tilde{r}, \bar{z})}{\bar{v}_z(\tilde{r}, \bar{z})} d\bar{z}; \qquad (4.18б)$$

где $\bar{\rho}_0$ — симплекс радиальной координаты, соответствующей линии тока на входе в область пластического течения.

При решении системы (4.18а,б) относительно неизвестных $\tilde{r}$, Λ использовали метод разложения в ряд, что значительно упрощает вычисления [75].

Деформационный разогрев металла учитывали зависимостью

$$\theta_\beta = \left[\theta_0^* + \frac{k_\text{т}}{\rho c_V} \int_{\bar{L}_{\text{ж}}}^{\bar{z}} \frac{T_{\beta-1} H_{\beta-1}}{(\bar{v}_z)_{\beta-1}} d\bar{z}\right], \qquad (4.19)$$

где $k_\text{т} = 0{,}9$; β — порядковый номер цикла расчета; θ_0^* — гранично заданная температура нагрева заготовки.

Интегрирование в (4.19) осуществляется вдоль линии тока $\tilde{r} = \tilde{r}(\bar{z})$, вследствие чего (4.19) решается в системе с (4.18а). В первом цикле расчета принимали $\theta_\beta = \theta_0^*$. Условие прекращения итерационного процесса имеет вид

$$\frac{(a_j)_\beta - (a_j)_{\beta-1}}{(a_j)_{\beta-1}} < \Delta_\text{т}^*, \quad j = \overline{1,7}, \qquad (4.20)$$

где $\Delta_\text{т}^*$ — гранично заданная величина.

Результаты реализации АММ, построение ИАММ процесса. При реализации АММ в уравнении (2.28) использовали значения констант $b_\text{к}$ из работы [16] и значения опытных констант $b_\text{к}'$, полученные при аппроксимации графиков А. А. Динника [76] зависимостью

$$\sigma_s = b_1' \dot{e}_1^{b_2'} \varepsilon_1^{b_3'} \exp(b_4' \theta), \qquad (4.21)$$

где $\dot{e}_1$, ε_1 — соответственно скорость и степень деформации при одноосном растяжении.

Учитывая, что (4.21) аппроксимирует результаты испытаний при одноосном растяжении, коэффициенты $b_\text{к}'$ и $b_\text{к}$ свя-

заны зависимостью $b_1 = 2^{-b_2'}3^{-(b_2'+0{,}5b_3')}\,b_1'$; $b_к\,(к = 2 \div 4) = b_к'\ (к = 2 \div 4)$.

При анализе процессов прессования полиметаллов функцию $T(r, z)$ из разрывной модифицировали в непрерывную по методике, изложенной в гл. 3. Вероятность разрушения прогнозировали по зависимости (2.73), в которой использовали закон [35]

$$\Lambda_р = C_1 + C_2 к_ж, \tag{4.22}$$

где C_1, C_2 — опытные константы.

Учитывая, что C_1, C_2 в (4.22) определялись при прессовании, т. е. в условиях, аналогичных анализируемому процессу, в соответствии с соображениями, изложенными в § 3 гл. 2, принимали условие деформации без разрушения, вытекающее из (2.73) при $\Phi_0 = 1$ и имеющее вид $\psi = \frac{\Lambda}{\Lambda_р} < 1$.

Анализ разработанной АММ процесса прессования моно- и полиметаллических цилиндрических труб и прутков осуществляли в два этапа. В ходе первого диалога с ЭВМ рассчитывали поля v_i, составляющие тензоров скоростей деформации $\dot{e}_{iк}$, напряжений $\sigma_{iк}$ и температур θ, а также поля ψ и Λ для произвольно заданных профилей матрицы. Характеристику профиля матрицы вводили в блок исходных данных выражением

$$\bar{R} = \varphi_1 \bar{z} + \varphi_2 \bar{z}^b + \varphi_3 \bar{z}^c + \varphi_4 \bar{z}^d, \tag{4.23}$$

где $\varphi_1 = \operatorname{tg}\alpha_у - (\varphi_2 \bar{h}_1^{b-1} + \varphi_3 \bar{h}_1^{c-1} + \varphi_4 \bar{h}_1^{d-1})$;

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_3 (\bar{h}_0^{c-1} - \bar{h}_1^{c-1}) + \varphi_4 (\bar{h}_0^{d-1} - \bar{h}_1^{d-1})}{\bar{h}_1^{b-1} - \bar{h}_0^{b-1}}; \quad \bar{h}_0 = \frac{h_0}{R_0};$$

$\alpha_у$ — условный угол конусности матрицы, $\alpha_у = \operatorname{arctg}\frac{R_0 - R_1}{h_0 - h_1}$; φ_1, φ_2 — коэффициенты, обеспечивающие соблюдение граничного условия $z = h_1$, $R = R_1$; $z = h_0$, $R = R_0$ (см. рис. 45), $\bar{h}_1 = \frac{h_1}{R_0}$; φ_3, φ_4, b, c, d — произвольные коэффициенты, характеризующие профиль матрицы.

На рис. 46 в качестве иллюстрации приведена типичная картина распределения $\sigma_z(r, z)$ для следующих исходных параметров расчета: заготовка биметаллическая, внутренний слой — сталь 15Х18Н12С4Т10, наружный слой — малоуглеродистая сталь ст. 3; температура предварительного нагрева заготовки 1150 °С; вытяжка $\mu_Σ = 9{,}33$; $\Lambda = 0{,}4$; $\bar{R}_1 = 0{,}5$; полуугол конусности матрицы (матрица — коническая, $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$), $\alpha_м = \alpha_у = 1{,}134$ рад. (65°); скорость прессования $v_ш =$

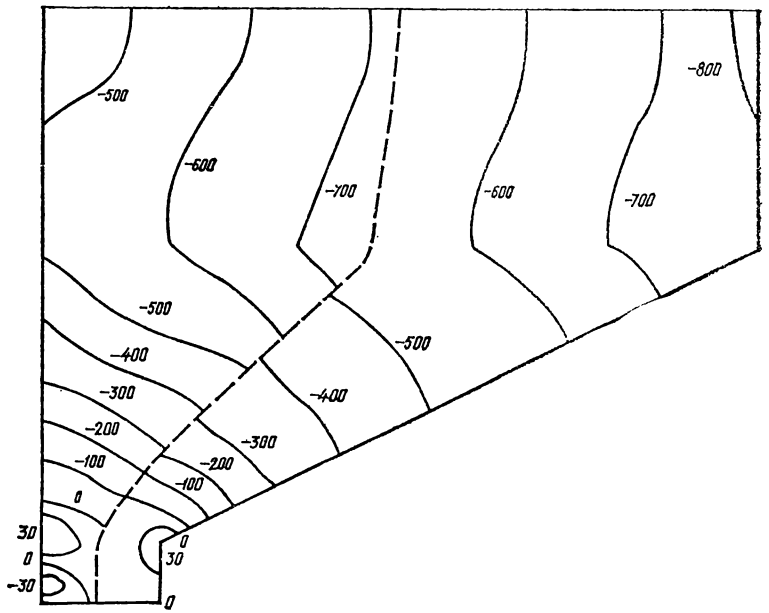

Рис. 46. Изобары напряжений σ_z

$= 0{,}6$ м/сек; показатели трения $f^*_{т1} = 0{,}5$; $f^*_{т2} = 0{,}5$; $f^*_{т3} = 0{,}4$; $f^*_{т4} = 0{,}6$.

Обобщение результатов расчета позволило сделать следующие выводы. Полученные картины распределения исследуемых параметров по очагу деформации качественно соответствуют имеющимся теоретическим и экспериментальным данным. Анализ результатов расчета показал, что во всех случаях, при прочих равных условиях, минимальные значения усилий прессования и ресурсов использования пластичности наблюдаются в тех случаях, когда профиль матрицы обеспечивает отсутствие разрыва полей $\dot{e}_{ik}$ и σ_{ik} в плоскостях $A'A$, $B'B$. Из соответствующих уравнений следует, что это возможно, если $\overline{R}(\overline{z})$ удовлетворяет условию (см. рис. 45)

$$\left.\frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{z}}\right|_{\overline{z}=\overline{h}_1} = \left.\frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{z}}\right|_{\overline{z}=\overline{h}_0} = 0. \qquad (4.24)$$

Также установлено, что при реальных значениях величин C_1, C_2, входящих в рассматриваемую математическую модель, точки с максимальными значениями показателя использования ресурса пластичности ψ^{max} и сдвиговых деформаций Λ^{max} совпадают. При этом показатель $к_ж$ в данной точке близок

к величине $\sigma_{вн}/T_{вн}$, где $T_{вн}$ — сдвиговое напряжение текучести материала на выходе из очага деформации.

В ходе второго диалога с ЭВМ анализировали влияние профиля матрицы на полное усилие прессования и величину ψ^{max} лишь для матриц, удовлетворяющих (4.24) как необходимому условию оптимума. Профиль матрицы задавали уравнением (4.23), в котором коэффициенты φ_3, φ_4, удовлетворяющие требованию (4.24), определяли из соотношений

$$\varphi_4 = \frac{(\bar{h}_0^{b-1} - \bar{h}_1^{b-1})(\bar{h}_0^{c-1} - \bar{h}_1^{c-1})\, b\,(b-c)\,\operatorname{tg}\alpha_y}{(\bar{h}_0^{d-1} - \bar{h}_1^{d-1})(d-b)\,M - (\bar{h}_0^{c-1} - \bar{h}_1^{c-1})(b-c)\,N}; \quad (4.25а)$$

$$\varphi_3 = \frac{(\bar{h}_0^{d-1} - \bar{h}_1^{d-1})(d-b)\,\varphi_4}{(\bar{h}_0^{c-1} - \bar{h}_1^{c-1})(b-c)}; \quad (4.25б)$$

где

$$M = c(\bar{h}_0^{c-1} - \bar{h}_1^{c-1})(b\bar{h}_0^{b-1} - \bar{h}_1^{b-1}) - b(\bar{h}_0^{b-1} - \bar{h}_1^{b-1})(c\bar{h}_0^{c-1} - \bar{h}_1^{c-1});$$

$$N = b(\bar{h}_0^{b-1} - \bar{h}_1^{b-1})(d\bar{h}_0^{d-1} - \bar{h}_1^{d-1}) - d(\bar{h}_0^{d-1} - \bar{h}_1^{d-1})(b\bar{h}_0^{b-1} - \bar{h}_1^{b-1}).$$

С целью определения оптимальных параметров процесса полученные расчетные данные использовали для создания ИАММ с помощью алгоритма, представленного на рис. 43. В результате получены уравнения

$$\bar{n}_{ср} = -\{1{,}15 + 0{,}021[0{,}89(1 - 0{,}44\bar{R}_1)\,b^2 + 0{,}51(1{,}66 - \bar{R}_1)\,c^2 + 1{,}25(1 - 0{,}61\bar{R}_1)\,d^2 - (2{,}2b + 2{,}5c + 4{,}9d) + 6{,}5\cdot 10^{-3}\alpha_y^{-2} + 1{,}5(f_т^* + f_{т3}^* + f_{т4}^*)] + [0{,}5\alpha_y - (0{,}25 + f_т^* + f_{т3}^*\lambda + f_{т4}^*)]\,\alpha_y\}\,C_3 \exp[0{,}55 + 0{,}25(f_т^* + f_{т3}^* + f_{т4}^*)]\ln\mu_Σ; \quad (4.26)$$

$$\Lambda^{max} = \{2{,}28 + 0{,}1[\alpha_y^3 - 1{,}5(f_{т3}^*\lambda\bar{R}_1^{-1} - 0{,}9f_т^*)\times (1 + 0{,}75\alpha_y^2)^{1{,}5} + 10^{-3}\alpha_y^{-2} + 0{,}8f_т^* + f_{т3}^*\lambda\bar{R}_1^{-1} + f_{т4}^*] + 0{,}032[1{,}29(1 - 0{,}4\bar{R}_1)\,b^2 + 1{,}25(1 - 0{,}63\bar{R}_1)\,c^2 + 1{,}9(1 - 0{,}55\bar{R}_1)\,d^2 - (3{,}3b + 3{,}9c + 7{,}1d)]\}C_4 \ln\mu_Σ, \quad (4.27)$$

где $\bar{n}_{ср}$ — средний коэффициент подпора на прессштемпеле, $\bar{n}_{ср} = \dfrac{P}{\pi(R_0^2 - r_0^2)\,k^*}$; P — полное усилие на прессштемпель: k^* — гранично заданный предел текучести деформируемого материала (при прессовании биметаллов — средняя величина); C_3, C_4 — константы, зависящие от эмпирических коэффициентов $b_к$ в уравнении (2.28); $f_т^* = 0{,}5(f_{т1}^* + f_{т2}^*)$.

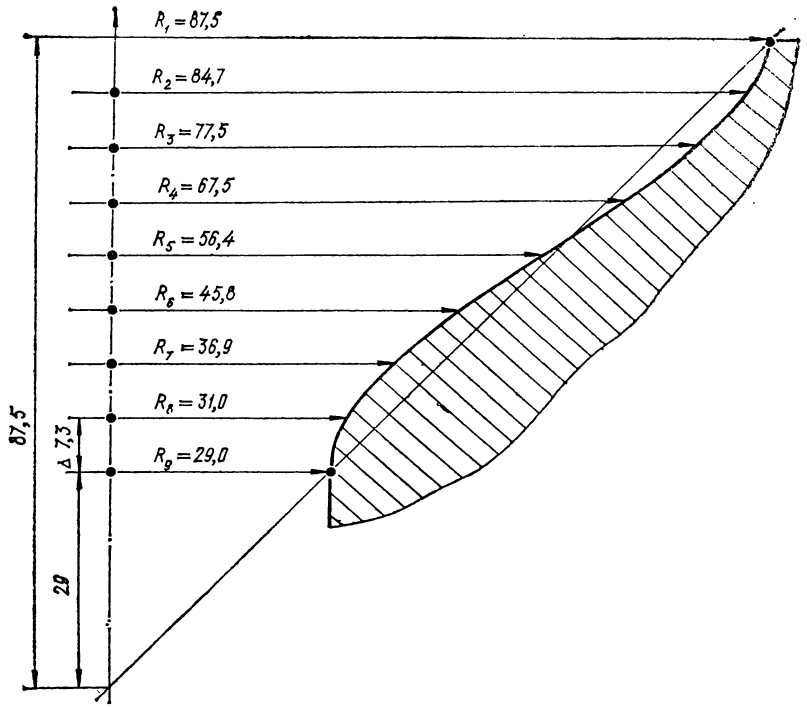

Рис. 47. Расчетный профиль матрицы

После соответствующего анализа уравнений (4.26), (4.27) для конкретных условий прессования можно получить функцию, описывающую профиль матричной воронки, обеспечивающий одновременное снижение энергосиловых параметров и вероятности разрушения деформируемой заготовки. Так, например, анализ ИАММ показал, что для случая прессования биметаллических труб (диаметр трубы 57 мм, толщина стенки 7 мм) типа нержавеющая сталь — углеродистая сталь оптимальным является криволинейный профиль матричной воронки (рис. 47), описываемый функцией

$$R = R_0(20{,}96909489\bar{z} - 69{,}32673997\bar{z}^{1{,}428} + 75{,}66135898\bar{z}^{1{,}882} - 26{,}30371386\bar{z}^{0{,}447}). \quad (4.28)$$

Полученная зависимость близка к зависимости, определяемой по основанной на принципе минимума полной мощности по методике, предложенной в работе [77].

Матрицы, профиль которых рассчитан по разработанной АММ, использованы для производства промышленных партий

труб. Усилие прессования по сравнению с использованием конических матриц традиционного профиля снизилось на 7 — 15 %, предел прочности готовых труб повысился на 5—7 %, критическая (по условиям разрушения) вытяжка увеличилась на 3—6 %, концевая обрезь снизилась на 5—15 %.

2. АММ формирования концевой продольной разностенности при прессовании биметаллических труб

Постановка задачи. Цель аналитического изучения процесса — определение деформационных параметров, поэтому рассматриваем конечные перемещения ϑ и ω (соответственно вдоль осей x и z) и соответствующие им составляющие тензора деформаций $T_e = [e_{ik}]$. При заполнении очага деформации объем $V_п$ материала заготовки, находящегося в состоянии пластического формоизменения ($\sigma_s \geqslant \sigma_т^*$ или, что то же самое, $T \geqslant k^*$), изменяется и зависит от перемещения прессштемпеля $\Delta S_ш$, т. е. $V_п = V_п(\Delta S_ш)$. Считаем, что объем $V_п$ ограничен верхней кромкой матричной воронки — плоскость $I - I$ (рис. 48) — и передней кромкой заготовки в матрице. Данный объем запишем в виде

$$V_п = F_ш \Delta S_ш, \tag{4.29}$$

где $F_ш$ — площадь поперечного сечения прессштемпеля.

Рассмотрим граничные условия процесса, определяемые спецификой способа формоизменения (расположение системы координат и обозначения на рис. 48):

1) $x = R_{оп}$, $\vartheta = 0$ — граничное условие означает, что металл не может отрываться от оправки в ходе деформации;

2) $x = R_{ко}$, $z = H_м$, $\vartheta/\omega = \operatorname{tg}\alpha_м$ — граничное условие означает, что точка A (кромка заготовки) может скользить только по поверхности матрицы;

3) $z = H_м$, $\dfrac{R_{ко} - x + \vartheta}{\omega} \geqslant \operatorname{tg}\alpha_м$ — граничное условие означает, что в любом случае максимальная осевая деформация передней кромки заготовки не может превышать той, при которой кромка соприкоснется с матрицей.

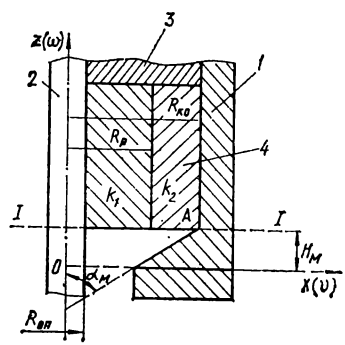

Рис. 48. Схема начальной стадии процесса:
1 — контейнер; *2* — оправка; *3* — прессштемпель; *4* — заготовка

Наличие граничного условия 3 значительно усложняет выбор

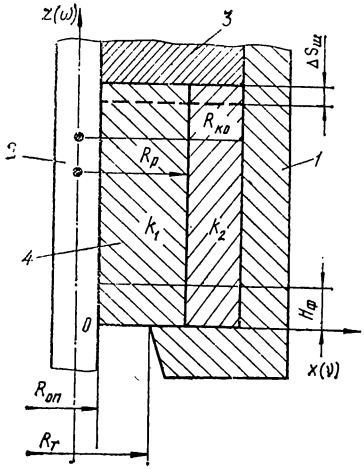

Рис. 49. Упрощенная схема начальной стадии процесса.
Обозначения те же, что и на рис. 48

подходящей приближающей функции для перемещений; для упрощения остановки задачи принимаем модель процесса прессования, использованную В. С. Смирновым при расчете энергосиловых параметров процесса [25]. Упрощение заключается в замене конусной матрицы прямым отверстием (матрицей с углом конусности $\alpha_м = 90°$). Такое упрощение следует считать допустимым, так как в реальных процессах прессования используются матрицы с весьма значительным углом конусности ($\alpha_м = 65 \div 75°$). В принятой схеме (рис. 49) задача значительно упрощается, и ее исходные положения формулируются следующим образом: угол конусности матрицы равен 90°; в процессе распрессовки заготовки (при заполнении зазоров между заготовкой и оправкой, заготовкой и контейнером) выдавливание в очко матрицы не происходит (на рис. 49 изображен момент процесса, соответствующий началу выдавливания материала заготовки в очко матрицы); объем металла, находящегося в состоянии пластического формоизменения, равен тому объему, который находится в состоянии пластического формоизменения в реальном процессе ($\alpha_м < 90°$). Этим связываются параметры рассматриваемой упрощенной модели и реального процесса.

Объем металла, находящегося в состоянии пластического формоизменения, при заполнении матричной воронки может быть определен для реального процесса (см. рис. 48):

$$V_п = \frac{1}{3}\pi H'_ф (R^2_{т.\,ср} - R_{т.\,ср}R_{ко} + R^2_{ко}) - \pi R^2_{оп} H'_ф; \quad (4.30)$$

для упрощенной модели (рис. 49):

$$V_п = \pi (R^2_{ко} - R^2_{оп}) H_ф, \quad (4.31)$$

где $H'_ф$, $H_ф$ — высота зоны формоизменения в реальном и рассматриваемом процессах; $R_{т.\,ср}$ — средний радиус нижней кромки трубы в реальном процессе.

Из (4.30) и (4.31) следует, что во время реального заполнения матричной воронки металлом в упрощенной модели высота

зоны деформации переменна и определяется как $H_{\Phi} = \Delta S_{\text{ш}}$. Начиная с момента полного заполнения матричной воронки металлом в реальном процессе для упрощенной модели величина H_{Φ} также стабилизируется на постоянном уровне $H_{\text{у}}$, определяемом из соотношения

$$H_{\text{у}} = \frac{H_{\text{м}} (H_{\text{м}}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_{\text{м}} + 3R_{\text{ко}}^2 - 3R_{\text{ко}} H_{\text{м}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{м}} - 3R_{\text{оп}}^2)}{3 (R_{\text{ко}}^2 - R_{\text{оп}}^2)}, \quad (4.32)$$

где $H_{\text{м}}$ — высота матрицы в реальном процессе, $H_{\text{м}} = (R_{\text{ко}} - R_{\text{т}}) \operatorname{ctg} \alpha_{\text{м}}$.

Граничные условия, выбор приближающих функций. Для упрощенной модели процесса справедливы следующие граничные условия, которым должны удовлетворять приближающие функции перемещений:

1) $x = R_{\text{оп}}$; $\vartheta = 0$ — так же как и в реальном процессе,

2) $x = R_{\text{ко}}$; $\vartheta = 0$ — граничное условие указывает на то, что в контейнере не могут образовываться пустоты;

3)
$$\frac{1}{R_{\text{т}} - R_{\text{оп}}} \int_{R_{\text{оп}}}^{R_{\text{т}}} \omega_{z=0}\, dx = \Delta S_{\text{ш}} \mu_{\Sigma} \quad (4.33)$$

при $R_{\text{оп}} \leqslant x \leqslant R_{\text{т}}$; $z = 0$ граничное условие соответствует условию неснижаемости и указывает на то, что уменьшение рабочего объема контейнера равно объему выпрессованного металла; величина в левой части выражения (4.33) представляет собой среднее осевое перемещение металла на выходе из очага деформации;

4) $z = 0$; $R_{\text{т}} < x \leqslant R_{\text{ко}}$; $\omega = 0$ — условие соответствует отсутствию деформаций (упругих и пластических) матрицы в осевом направлении;

5) $x = R_{\text{т}}$; $z = 0$; $\omega_{x-dx} = \omega_{x+dx}$ — граничное условие предусматривает равенство перемещений в точке $[R_{\text{т}}; 0]$ при их определении справа и слева от данной точки, что в конечном счете соответствует неразрывности линий тока металла (для объемов металла, находящихся вне зоны деформации, вводятся граничные условия, которые позволяют анализировать картину формоизменения в целом);

6) $z \leqslant 0 - dz$; $R_{\text{оп}} \leqslant x \leqslant R_{\text{т}}$; $\vartheta = 0$; $\omega = \Delta S_{\text{ш}} \mu_{\Sigma}$;

7) $z \geqslant H_{\Phi} + \Delta S_{\text{ш}i} + dz$; $R_{\text{оп}} \leqslant x \leqslant R_{\text{ко}}$; $\vartheta = 0$; $\omega = \Delta S_{\text{ш}}$, где $\Delta S_{\text{ш}i}$ — перемещение прессштемпеля, принятое для i-го цикла расчета.

Граничные условия 6 и 7 соответствуют условию отсутствия деформаций вне объема V.

Подходящую функцию для радиальных перемещений представим в виде

$$\vartheta = \left(\frac{x}{R_{оп}} - 1\right)\left(\frac{x}{R_{ко}} - 1\right)(a_1 x + a_2 z), \qquad (4.34)$$

где a_1, a_2— независимые произвольные варьируемые параметры, значения которых должны удовлетворять условию минимума работы формоизменения.

Такой подход к выбору подходящей функции обусловлен экспериментально установленным фактом, согласно которому при близких значениях k_1 и k_2 ($k_1/k_2 = 0{,}9 \div 1{,}1$) на границе слоев не наблюдается разрывов линий тока («срезового» искажения координатной сетки).

Из (4.34) определяем радиальную деформацию

$$e_x = a_1\left(\frac{3x^2}{R_{оп}R_{ко}} - \frac{2x}{R_{оп}} - \frac{2x}{R_{ко}} + 1\right) + a_2\left(\frac{2x}{R_{оп}R_{ко}} - \frac{1}{R_{оп}} - \frac{1}{R_{ко}}\right)z.$$

В рассматриваемой задаче принимаем гипотезу полной пластичности в интерпретации $e_x = e_\theta = -\frac{1}{2}e_z$. Из (4.36) следует

$$e_z = -2\left[a_1\left(\frac{3x^2}{R_{оп}R_{ко}} - \frac{2x}{R_{оп}} - \frac{2x}{R_{ко}} + 1\right) + a_2\left(\frac{2x}{R_{оп}R_{ко}} - \frac{1}{R_{оп}} - \frac{1}{R_{ко}}\right)z\right].$$

Интегрируя $e_z(x, z)$ по dz, получаем значения осевых перемещений

$$\omega = -2z\left[a_1\left(\frac{3x^2}{R_{оп}R_{ко}} - \frac{2x}{R_{оп}} - \frac{2x}{R_{ко}} + 1\right) + a_2\left(\frac{2x}{R_{оп}R_{ко}} - \frac{1}{R_{оп}} - \frac{1}{R_{ко}}\right)\frac{z}{2}\right] + f(x).$$

Величина произвольной функции $f(x)$ в последнем выражении определяется по разному для участков $R_т < x \leqslant R_{ко}$; $R_{оп} \leqslant x \leqslant R_т$ в соответствии с граничными условиями 3—5.

Для участка $R_т < x \leqslant R_{ко}$; $z = 0$; $\omega = 0$, что после подстановки в выражение $\omega(x, z)$ позволяет определить $f(x)$ как $f(x) = 0$.

Для участка $R_{оп} \leqslant x \leqslant R_т$; $z = 0$ в соответствии с граничными условиями 3 и 5 должны соблюдаться одновременно равенства

$$\left.\begin{aligned} &\int_{R_{оп}}^{R_т} f(x)\,dx = \frac{\Delta S_ш (R_{ко}^2 - R_{оп}^2)}{R_т + R_{оп}}; \\ &f(R_т) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(4.35а) \\ &(4.35б) \end{aligned}$$

Принимаем параболическую зависимость осевых перемещений от координаты x в виде

$$f(x) = \omega\,[R_{оп} \leqslant x \leqslant R_т;\ z = 0] = \left(\frac{x^2}{R_т^2} - 1\right)\bar{\beta}_3 x, \quad (4.36)$$

где $\bar{\beta}_3$ — безразмерный коэффициент, обеспечивающий соблюдение граничного условия 3.

Исходя из смысла коэффициента $\bar{\beta}_3$, определим его величину, подставив (4.36) в (4.35а)

$$\bar{\beta}_3 \int_{R_{оп}}^{R_т} \left(\frac{x^2}{R_т^2} - 1\right) x\,dx = \frac{\Delta S\,(R_{ко}^2 - R_{оп}^2)}{R_т + R_{оп}}. \quad (4.37)$$

Интегрируя и решая (4.37) относительно $\bar{\beta}_3$, после преобразований окончательно получаем

$$\bar{\beta}_3 = \frac{2\,(R_{ко}^2 - R_{оп}^2)\,\Delta S_ш}{R_т^2\left[\frac{R_{оп}^2}{R_т^2}\left(1 - \frac{R_{оп}^2}{2R_т^2}\right) - 0{,}5\right](R_т + R_{оп})}. \quad (4.38)$$

Общее решение. В соответствии с энергетическими методами решения задач о пластическом формоизменении с применением прямого метода Релея—Ритца решение поставленной нами задачи сводится к решению системы двух уравнений относительно неизвестных a_1, a_2

$$\left\{\frac{\partial A_а}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1, 2}, \right. \quad (4.39)$$

где $A_а$ — работа активных сил, затраченная на формоизменение.

Величина $A_а$ складывается из работы деформации и работы по преодолению сил внешнего трения

$$A_а = \sum_{n=1}^{2}\left\{\iiint_{D_n} k_n \Gamma_n\,dW + \iint_{S_n} \tilde{\Phi}\,[\bar{f}_{тn};\ k_n;\ \nu\,(S_n);\ \omega\,(S_n)]\,dS\right\}, \quad (4.40)$$

где n — порядковый номер слоя биметаллической заготовки; D_n — объем материала соответствующего слоя, находящегося в состоянии пластического течения; S_n — поверхность контакта соответствующего слоя с инструментом; Γ_n — интенсивность сдвиговых деформаций, $\Gamma_n = \sqrt{3e_z^2 + \gamma_{xz}^2}$; γ_{xz} — сдвиговая деформация, $\gamma_{xz} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x}$; $\bar{f}_{тn}$ — усредненный показатель трения на контакте соответствующего слоя и инструмента.

Значения всех величин, входящих в (4.40), определены ранее, поэтому дальнейшее решение задачи сводится к поиску величин a_j из системы уравнений (4.39); эти уравнения в развернутом виде весьма громоздки, поэтому ограничимся в дальнейшем общими уравнениями. Развернутая форма записи соответствующих выражений приведена в работе [78].

В основу принципа реализации разработанной АММ заложены следующие соображения общего характера.

1. Разработанная модель не учитывает возможности разрыва линий тока на границе слоев составной заготовки. Функции, описывающие течение металла в областях с различными показателями пластических свойств, одинаковы по математической структуре, а влияние различия в величинах k_1 и k_2 на характер формоизменения учитывается посредством усредненных по объему коэффициентов a_1 и a_2. Поэтому разработанная модель может быть использована при анализе прессования биметаллических заготовок с относительно близкими пластическими характеристиками. Поскольку модель используется для анализа процесса прессования биметалла, у которого свойства слоев близки (сталь—сталь), принятые допущения следует признать справедливыми.

2. Разработанная модель базируется на уравнениях неразрывности, потому она справедлива для малых деформаций. Для анализа больших деформаций, имеющих место в реальном (рассматриваемом нами) процессе, необходимо разбивать суммарную деформацию на ряд частных, а общие перемещения (деформации) находить пользуясь правилом аддитивности, суммируя частные перемещения (деформации).

3. При реализации разработанной математической модели анализировали характер перемещений при небольших частных перемещениях прессштемпеля $\Delta S_{шi}$ (в расчете конкретно принимали $\Delta S_{шi} = 0{,}25H_у$). Суммарные перемещения при общем перемещении прессштемпеля $\Delta S_ш = \sum_{i=1}^{m} \Delta S_{шi}$ (m — число последовательных циклов расчета) определяются как $\vartheta = \sum_{i=1}^{m} \vartheta_i$; $\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$. При этом расчет величин ϑ_i и ω_i осуществляется в соответствии с условиями

$$\vartheta_i = \left(\frac{x_{i-1}}{R_{оп}} - 1\right)\left(\frac{x_{i-1}}{R_{ко}} - 1\right)(a_{1i}x_{i-1} + a_{2i}z_{i-1}); \quad (4.41а)$$

$$\omega_i = -2z_{i-1}\left\{a_{1i}\left[\left(\frac{3x_{i-1}^2}{R_{оп}R_{ко}} + 1\right) - 2x_{i-1}\left(\frac{1}{R_{оп}} + \frac{1}{R_{ко}}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{z_{i-1}a_{2i}}{2}\left(2x_{i-1} - \frac{1}{R_{оп}} - \frac{1}{R_{ко}}\right)\right\} + f(x_{i-1}). \quad (4.41б)$$

Условия (4.41) означают, что при анализе постепенного перемещения данной конкретной точки по очагу деформации учитывается изменение ее координат по мере возрастания числа циклов расчета.

На рис. 50 приведена типичная расчетная зависимость положения точки раздела слоев прессуемого биметалла в сечении выхода ($z = 0$) от числа циклов расчета m; на рисунке положение точки раздела характеризуется безразмерным параметром

$$\tilde{t}_т = \frac{R_т - R_{оп}}{R_{тр} - R_{оп}}, \quad (4.42)$$

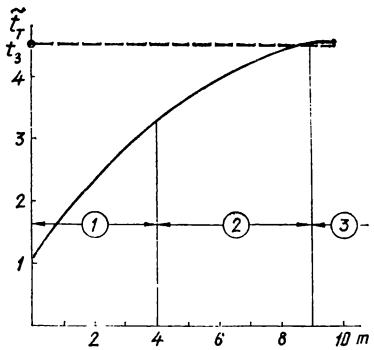

Рис. 50. Зависимость характеристики положения точки раздела слоев от порядкового номера цикла расчета:

1 — заполнение матричной воронки; *2* — неустановившаяся стадия; *3* — установившаяся стадия

где $R_{тр}$ — разделительный радиус на трубе.

Анализ результатов расчета показал, что в ходе увеличения числа циклов деформации точка раздела перемещается в сторону иглы, причем ее положение стабилизируется. Стабилизация положения точки раздела слоев происходит на уровне, обеспечивающем соблюдение соотношения

$$\frac{R_т - R_{оп}}{R_{тр} - R_{оп}} \approx \frac{R_{ко} - R_{оп}}{R_р - R_{оп}}. \quad (4.43)$$

Результат теоретического анализа позволяет констатировать, что соотношения толщин слоев на заготовке и трубе приблизительно одинаковы. Суммарная величина $\Delta S_{ш.с}$, соответствующая стабилизации значений $\tilde{t}_т$, определяет величину хода прессштемпеля до начала установившегося процесса и величину концевой обрези $L_{обр} = \Delta S_{ш.с}\,\mu_Σ$. Вывод о приблизительном равенстве соотношений толщин слоев на заготовке и трубе позволяет организовать упрощенное решение задачи с целью получения в конечном виде аналитической зависимости для определения величины концевой обрези.

Вывод упрощенной формулы для определения концевой обрези. В основу вывода положено полученное при анализе общей модели экспериментально подтвержденное положение о приблизительном совпадении соотношения толщин слоев на заготовке и трубе. Это позволяет определить длину хода прессштемпеля (т. е. длину обрези) до начала установившегося процесса на основании условия: перемещение разделительной

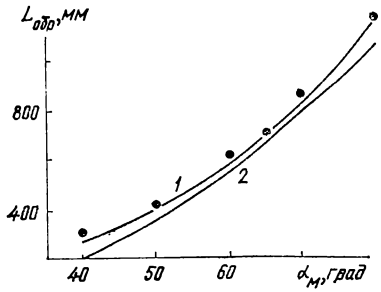

Рис. 51. Зависимость длины концевой обрези от полуугла матрицы: *1* — расчет по исходной методике; *2* — расчет по упрощенной методике (точки — эмпирические данные)

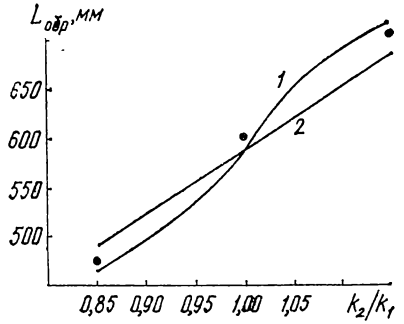

Рис. 52. Зависимость длины концевой обрези от соотношения k_2/k_1. Обозначения те же, что и на рис. 51

точки задано и равно $\Delta R_р = R_{тр} - R_р$. Используя принятое условие в выражении для определения радиальных перемещений $\Delta R_р = \vartheta\,(a_j,\ x,\ \Delta S_ш)$, определим $\Delta S_{ш.с}$ и $L_{обр}$.

Для того чтобы получить решение в конечном аналитическом виде, введем следующие допущения и упрощения общей модели: считаем оправданным переход от малых деформаций к большим, это позволяет рассчитывать интересующую нас деформацию за один конечный «большой» цикл; для упрощения выводов используем в исходной функции (4.34) лишь один независимый варьируемый параметр ($a_2 = 0$). Применительно к принятым допущениям задача сводится к определению одного неизвестного варьируемого параметра $a_1 = a$ из условия $\frac{\partial A_a}{\partial a} = 0$ и последующему определению по известному перемещению $\vartheta = \Delta R_р$ величин $\Delta S_{ш.с}$ и $L_{обр}$.

Решение задачи в приведенной постановке дает следующий результат

$$L_{обр} = \frac{\mu_\Sigma}{A_3}\left[\frac{(1 - R_{тр}R_р^{-1})\,A_1}{(R_р R_{оп}^{-1} - 1)\,(1 - R_р R_{ко}^{-1})} + A_2\right], \qquad (4.44)$$

где A_1, A_2, A_3 — функции параметров деформации с размерностями работы, вариации работы и усилия соответственно.

На рис. 51, 52 приведены результаты расчета параметров концевой обрези по формуле (4.44) и эмпирически определенные значения величины $L_{обр}$ [78]. Близкое совпадение расчетных и эмпирических данных позволяет рекомендовать разработанную методику для прогнозирования параметров концевой обрези при прессовании биметаллических труб из материалов с близкими механическими характеристиками.

3. Статистическая методика определения длины концевой обрези при прессовании биметаллов

На основании анализа результатов реализации АММ, а также в соответствии с результатами экспериментальных исследований можно констатировать, что характерной особенностью производства биметаллических труб является изменение по длине трубы на ее переднем конце коэффициента плакировки

$$n_{\text{т}} = \frac{(D_2^{\text{т}})^2 - (D_3^{\text{т}})^2}{(D_1^{\text{т}})^2 - (D_3^{\text{т}})^2}, \qquad (4.45)$$

где $D_1^{\text{т}}$, $D_2^{\text{т}}$, $D_3^{\text{т}}$ — соответственно значения наружного, граничного и внутреннего (разделительного) диаметров трубы.

Величина $n_{\text{т}}$ изменяется от $n_{\text{т}} = 1$ у торца до своего установившегося значения $\bar{n}$ на некоторой длине $\bar{L}$, величина которой неразрывно связана с длиной концевой обрези. В связи с этим существенное значение в технологическом процессе прессования биметаллических труб занимает определение длины концевой обрези, обеспечивающей минимальную величину расходного коэффициента металла при условии соблюдения допуска на соотношение толщин основного и плакирующего слоев. Это условие может быть представлено в виде

$$n_{\text{т}}^{\min} \leqslant n_{\text{т}} \leqslant n_{\text{т}}^{\max}, \qquad (4.46)$$

где $n_{\text{т}}^{\min}$, $n_{\text{т}}^{\max}$ — нижняя и верхняя границы поля допуска для коэффициента плакировки, определяемые по соотношению толщин основного и плакирующего слоев с учетом допусков на их изменение.

Минимальное суммарное число резов концов труб, равное числу труб в партии, при одновременном соблюдении ограничения (4.46) может быть достигнуто в том случае, если длина концевой обрези удовлетворяет соотношению [1]

$$\bar{n}_0 \bar{P} \leqslant 1, \qquad (4.47)$$

где $\bar{n}_0$ — число труб в партии; $\bar{P}$ — вероятность невыполнения условия (4.46).

Если установлена функциональная зависимость $\bar{P}(\tilde{l})$, где $\tilde{l}$ — длина обрези, то можно определить величину $\tilde{l} = \tilde{l}_{\max}$, которая обеспечивает выполнение условия (4.47) при однократной обрезке каждой трубы. При таком подходе суммарная длина концевой обрези P_{Σ} будет максимальной.

---

[1] Здесь и далее подразумевается вероятностный характер выполнения соответствующего условия.

В реальных промышленных условиях число резов $\bar{m}$ на одной трубе отвечает условию $\bar{m} \geqslant 1$. Естественно, что увеличение $\bar{m}$, с одной стороны, снижает L_Σ, но, с другой стороны, повышает трудозатраты на изготовление труб. Задачей является обоснование оптимальных значений $\bar{m}$ при производстве относительно небольших партий труб.

Суммарная длина концевой обрези в партии из $\bar{n}_0$ труб при условии 100 %-го выполнения лимитирующего ограничения (4.46) может быть определена из выражения

$$L_\Sigma = (\tilde{l}_{\max} - \sum_{i=1}^{\tilde{m}-1} \tilde{l}_i)\,\bar{n}_{\tilde{m}-1} + \sum_{i=1}^{\tilde{m}-1} \tilde{l}_i\,(\bar{n}_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{n}_j), \quad (4.48)$$

где $\tilde{m}$ — исходно заданное максимально допустимое число резов для каждой из труб в данной партии; $\bar{n}_{\tilde{m}-1}$, $\bar{n}_j$ — число труб, для которых соответственно не выполняется лимитирующее условие (4.45) после $(\tilde{m}-1)$-го реза и выполняется (4.46) после j-го реза; $\tilde{l}_i$ — длина обрези при i-м резе.

Отдельным статистическим исследованием было установлено, что для биметаллических труб, прессуемых из центробежнолитых заготовок, вероятность $\bar{P}$ несоблюдения регламентирующего условия (4.46) на неподвергавшейся ранее обрезке трубе связана с длиной обрези экспоненциальной зависимостью вида

$$\bar{P} = \exp(\tilde{a}\tilde{l}). \quad (4.49)$$

где $\tilde{a}$ — эмпирический коэффициент, зависящий от поля допуска и конкретных условий прессования.

На трубах, подвергшихся $i-1$ предварительной обрезке, функция распределения вероятности сохраняет экспоненциальный вид

$$\bar{P}_i = \exp(\tilde{a}_i\tilde{l}_i). \quad (4.50)$$

Подставляя (4.49) в (4.47), получаем после соответствующих преобразований условие, гарантирующее выполнение соотношения (5.46) на всех $\bar{n}_0$ трубах партии после первой обрезки:

$$\tilde{l}_{\max} \geqslant -\tilde{a}^{-1} \ln \bar{n}_0. \quad (4.51)$$

Для последующих резов после аналогичных преобразований получим

$$(\tilde{l}_i)_{\max} \geqslant \tilde{l}_{\max} \sum_{l=1}^{i-1} \tilde{l}_l. \quad (4..52)$$

Рассматривая предельные условия, заменяем неравенства (4.51), (4.52) равенствами. Используя (4.52), получаем вероятное значение числа отбракованных труб после i-й обрезки как функцию длины обрези $\tilde{l}_i$ на данном этапе

$$\bar{n}_i = \left(\bar{n}_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{n}_j\right)\left[\bar{n}_i \tilde{l}_i \left(\tilde{l}_{\max} - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{l}_j\right)^{-1}\right]^{-1}. \qquad (4.53)$$

Подставляя (4.53) в (4.48), можно определить оптимальные значения $\tilde{l}_i$, обеспечивающие минимизацию L_Σ при исходно заданном $\tilde{m}$, оценить влияние $\tilde{m}$ на L_Σ и обоснованно назначить величину $\tilde{m}$ и $\tilde{l}_i$ для промышленных условий.

Рассмотрим пример реализации изложенной методики для конкретного случая. Для биметаллических труб типа нержавеющая сталь — углеродистая сталь диаметром 50—60 мм с толщиной стенки 6—8 мм и регламентированным значением $n_т = 1{,}5 \pm 0{,}2$ вероятностная функция (4.49) имеет вид $\bar{P} = \exp(-3{,}73\tilde{l})$. Для партии с суммарным числом труб $\bar{n}_0 = 32$ в соответствии с условием (5.51) $\tilde{l}_{\max} = 0{,}93$ м. Определение оптимальных (с точки зрения минимизации величины L_Σ при заданной величине $\tilde{m}$) значений $\tilde{l}_i$ представляет собой многомерную задачу поиска экстремума-минимума функции (4.48). Реализацию решения для $\tilde{m} = 1 \div 5$ осуществляли на ЭВМ с использованием градиентного метода крутого восхождения. На рис. 53 представлены результаты расчета.

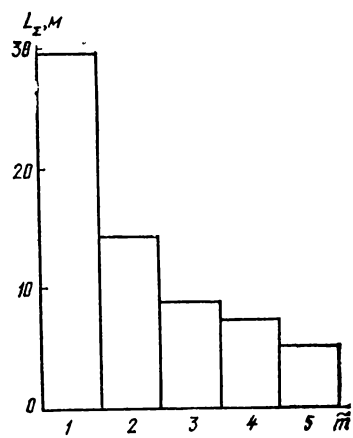

Рис. 53. Гистограмма зависимости L_Σ от $\tilde{m}$

Как следует из приведенных данных, увеличение $\tilde{m}$ в области $\tilde{m} = 1 \div 3$ существенно снижает длину суммарной концевой обрези в партии. Дальнейшее увеличение $\tilde{m}$ сказывается на уменьшении L_Σ незначительно. Полученные данные позволили предложить технологию изготовления труб со следующими параметрами обработки на участке отделки: $\tilde{m} = 3$; $\tilde{l}_1 = 0{,}29$ м; $\tilde{l}_2 = 0{,}24$ м; $\tilde{l}_3 = 0{,}5$ м. Ожидаемая суммарная длина концевой

обрези L_Σ при этом составляет 8,7 м. Данные рекомендации апробированы при производстве промышленной партии труб. При этом реальная величина суммарной обрези составила величину $L_\Sigma = 9{,}1$ м. Близкое совпадение расчетных и эмпирических данных подтверждает правильность предложенной методики определения параметров концевой обрези.

4. Определение геометрических параметров центробежнолитых биметаллических заготовок

Параметры обточки. Специфика приемки биметаллических труб состоит в том, что ГОСТом и ТУ оговариваются следующие их геометрические параметры: максимальное и минимальное значения толщины плакирующего слоя и суммарной толщины стенки в партии труб; абсолютная разнотолщинность плакирующего слоя и суммарной стенки на каждой из труб партии; максимальное и минимальное значения внешнего диаметра в партии труб и на каждой трубе в отдельности. Обычно число труб в партии не превышает 250 штук.

Одна из особенностей центробежного литья заключается в том, что геометрические размеры получаемых биметаллических заготовок близки к идеальным: продольная и поперечная разнотолщинность практически отсутствует, граница между двумя металлами — точный круг, концентричный с образующими внешней и внутренней поверхностей. При этом вследствие трудностей точной дозировки металлов, а также из-за некоторых особенностей кристаллизации граничный диаметр заготовок во многих случаях отличается от номинально установленного расчетами. В целях сохранения заданного коэффициента плакировки, определяемого как соотношение площадей поперечного сечения плакирующего слоя и поперечного сечения всей трубы, необходима механическая обработка заготовок как по внешней, так и по внутренней поверхностям. Эта операция приводит к двум отрицательным последствиям: во-первых, вследствие несоосной установки заготовок на них наводится поперечная разностенность; во-вторых, обточка приводит к увеличению зазоров между контейнером, оправкой и заготовкой, что увеличивает степень нарушения точности размеров заготовки в ходе подпрессовки в начальной стадии прессования.

Если принять, что заготовка до обточки сформирована тремя идеально концентричными диаметрами D_1, D_2, D_3 (рис. 54), то максимально возможная наведенная поперечная разнотолщинность по внешнему и внутреннему слоям составит соответственно значения, равные обточке по внешнему диаметру ΔD_1 и расточке по внутреннему диаметру ΔD_3. Учитывая теоретически и экспериментально подтвержденный факт, в соот-

ветствии с которым относительная поперечная разностенность при прессовании труб всегда снижается по отношению к исходной относительной поперечной разностенности заготовок [79], можно утверждать, что разнотолщинность слоев труб гарантированно не будет превышать величин

$$\delta_{т}^{н} = \frac{\Delta D_1}{S_0^{н} + 0{,}5\Delta D_1}; \quad (4.54)$$

$$\delta_{т}^{в} = \frac{\Delta D_3}{S_0^{в} - 0{,}5\Delta D_3}, \quad (4.55)$$

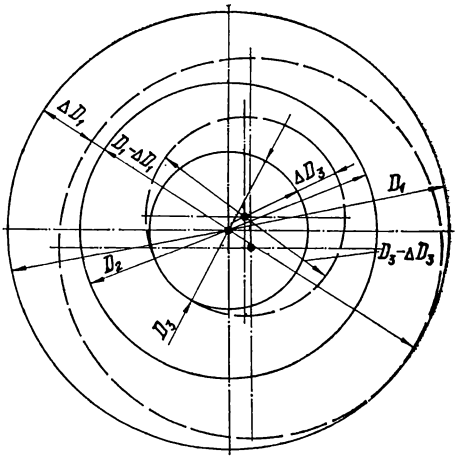

Рис. 54. Схема обточки заготовки

где $\delta_{т}^{н}$ — относительная поперечная разнотолщинность наружного слоя трубы, $\delta_{т}^{н} = \frac{\Delta_1}{S_1^{н}}$; $\delta_{т}^{в}$ — относительная поперечная разнотолщинность внутреннего слоя трубы, $\delta_{т}^{в} = \frac{\Delta_3}{S_3^{н}}$; $S_1^{н}$, $S_3^{н}$ — средние значения толщины наружного и внутреннего слоев трубы; Δ_1, Δ_3 — поля разброса толщин наружного и внутреннего слоев трубы; $S_0^{н}$, $S_0^{в}$ — исходные значения толщины наружного и внутреннего слоев центробежнолитой заготовки.

Из выражений (4.54), (4.55) можно получить максимально допустимые значения ΔD_1, ΔD_3, величины которых будут гарантировать, что полученная труба не выйдет за поле допуска по параметрам поперечной разнотолщинности слоев

$$\Delta D_1 \leqslant \frac{\Delta_1' S_0^{н}}{S_1 + 0{,}5\Delta_1'}; \quad (4.56)$$

$$\Delta D_3 \leqslant \frac{\Delta_3' S_0^{в}}{S_3 + 0{,}5\Delta_3'}; \quad (4.57)$$

где Δ_1', Δ_3' — заданные поля допусков на толщины наружного и внутреннего слоев трубы; S_1, S_3 — заданные номинальные значения толщин наружного и внутреннего слоев трубы.

Предельные значения граничного диаметра. Характерной особенностью прессования биметаллических труб из центробежнолитых заготовок является практическое равенство коэф-

фициентов плакировки на трубе ($n_т$) и исходной заготовке ($n_з$). Это свойство процесса, физически основанное на усреднении вытяжек внутреннего и наружного слоев, закладывается в основу определения граничного диаметра заготовок $D_2^з$ по величинам наружного, внутреннего и граничного диаметров трубы (соответственно $D_1^т$, $D_2^т$, $D_3^т$). Так как по условиям изготовления и поставки труб каждая из величин $D_1^т$, $D_2^т$, $D_3^т$ может колебаться в пределах, определяемых допусками, значение коэффициента плакировки $n_т$ также может колебаться в некоторых пределах.

Из (4.45) следует, что максимальное значение коэффициента плакировки на трубе $n_т^{max}$ будет соответствовать сочетанию максимального граничного и минимального внешнего диаметров трубы — соответственно $(D_2^т)_{max}$ и $(D_1^т)_{min}$. Для того чтобы выяснить характер влияния изменения внутреннего диаметра $D_3^т$ на коэффициент плакировки трубы $n_т$, рассмотрим дифференциал

$$\frac{\partial n_т}{\partial D_3^т} = \frac{2D_3^т\,[(D_2^т)^2 - (D_1^т)^2]}{[(D_1^т)^2 - (D_3^т)^2]^2}. \qquad (4.58)$$

Так как правая часть выражения (4.58) всегда меньше нуля, очевидно, что максимальному значению $n_т^{max}$ соответствует минимальное значение внутреннего диаметра трубы $(D_3^т)_{min}$. На основании изложенного пределы возможного в рамках допусков колебания величины $n_т$ определяются соотношением

$$\frac{(D_2^т)^2_{min} - (D_3^т)^2_{max}}{(D_1^т)^2_{max} - (D_2^т)^2_{max}} \leqslant n_т \leqslant \frac{(D_2^т)^2_{max} - (D_3^т)^2_{min}}{(D_1^т)^2_{min} - (D_3^т)^2_{min}}. \qquad (4.59)$$

Из выражения (4.59) на основании того, что $n_т^{max} = n_з^{max}$ и $n_т^{min} = n_з^{min}$, получаем выражения для определения минимального

$$(D_2^з)_{min} = \sqrt{[(D_1^з)^2_{max} - (D_3^з)^2_{max}]\,n_т^{min} + (D_3^з)^2_{max}} \qquad (4.60)$$

и максимального

$$(D_2^з)_{max} = \sqrt{[(D_1^з)^2_{min} - (D_3^з)^2_{min}]\,n_т^{max} + (D_3^з)^2_{min}} \qquad (4.61)$$

значений граничного диаметра заготовки. Поля допусков для величин наружного $D_1^з$ и внутреннего $D_3^з$ диаметров заготовки на практике задают, исходя из конкретных размеров инструмента пресса. Если при этом величина $D_2^з$ лежит в пределах,

определяемых выражениями (4.60), (4.61), то все геометрические размеры трубы будут лежать в пределах допусков.

Изложенная методика позволяет значительно снизить отбраковку центробежнолитых заготовок по сравнению с методикой, в которой допустимые пределы изменения граничного диаметра D_2^3 определяются по номинальным значениям $D_1^т$, $D_2^т$, $D_3^т$ без учета полей допусков на их колебания. Так, при прессовании трубы с номинальными размерами и отклонениями, составляющими (мм) $D_1^т = 124{,}5^{+2{,}0}_{-1{,}0}$; $D_2^т = 96{,}0^{+2{,}5}_{-0{,}5}$; $D_3^т = 70^{+2{,}0}_{-1{,}0}$, из заготовки, для которой задано $D_1^з = 260 \pm 2{,}0$, $D_3^з = 120 \pm 3{,}0$, получим, что рассчитанное по номинальным размерам трубы значение $D_2^з$ лежит в пределах 187—193 мм, а при расчете $D_2^з$ с учетом возможных колебаний размеров трубы получим $181{,}5 \leqslant D_2^з \leqslant 202{,}3$ мм. Из примера следует, что при использовании предложенной методики поле допуска на значения $D_2^з$ может быть расширено более чем в 4 раза без опасности увеличения отбраковки труб по точности геометрических размеров.

Изложенная АММ определения геометрических размеров центробежнолитых биметаллических заготовок успешно используется в производственных условиях,

Глава пятая

ГИДРОЭКСТРУЗИЯ

1. Контактное взаимодействие при гидроэкструзии сплошных изделий

Одним из наиболее перспективных способов производства металлопродукции с особыми механическими свойствами и повышенными характеристиками по качеству поверхности и точности геометрических размеров является гидроэкструзия. Интенсивные исследования привели к созданию ряда промышленных установок с высокоэффективной технологией производства [80].

Современные методы производства изделий как холодной, так и горячей (теплой) гидроэкструзией при всем разнообразии схем и оборудования в своей основе можно классифицировать по следующим основным группам.

1. Производство сплошных изделий из предварительно деформированных заготовок; из порошков.

2. Производство трубчатых изделий: а) из трубчатых предварительно деформированных заготовок на неподвижной, подвижной (плавающей), на полуподвижной оправках, с использованием деформируемого сердечника, в том числе рабочей жидкости в качестве оправки (редуцирование гидроэкструзией); б) из листовых заготовок; в) из порошков.

Режим трения и взаиморасположение векторов движения заготовки и напряжений контактного трения оказывает существенное, а в ряде случаев — решающее воздействие на энергосиловые и деформационные характеристики процесса пластического формоизменения. Задача активного управления силами трения — одна из наиболее актуальных проблем обработки металлов давлением [81—83].

В связи с этим особый интерес представляют теоретические исследования, позволяющие оценить характер влияния и уровень воздействия различных технологических параметров конкретного процесса ОМД на величину и закон распределения напряжений трения на контактной поверхности.

Указанная проблема при математическом моделировании процессов гидроэкструзии стоит особенно остро, так как некоторые аспекты контактного взаимодействия при гидроэкструзии изучены явно недостаточно. Так, например, практи-

чески отсутствуют исследования, посвященные изучению влияния скорости прессования на параметры контактного взаимодействия (контактные нормальные и касательные напряжения, толщина смазочного слоя), остается дискуссионным вопрос о характере течения рабочей жидкости в зазоре между деформируемым металлом и инструментом. Ряд исследователей считают, что при гидроэкструзии имеет место граничное трение и оценивают величину напряжений контактного трения (удельных сил трения) из условия Амонтона—Кулона [84, 85]. В работе [86] отмечено, что режим трения при гидроэкструзии может изменяться от граничного до гидродинамического, но последний наблюдается лишь в отдельных случаях. В результате анализа ряда исследований [87] сделан вывод о том, что наиболее характерным для гидроэкструзии является режим гидродинамического трения, причем рабочая жидкость опережает экструдат в зоне деформации (активное жидкостное трение). Авторы работы [88] на основании теоретического анализа отмечают, что в начале очага деформации рабочая жидкость отстает от экструдата (пассивное жидкостное трение), а на выходе — опережает. Теоретический анализ [89] позволил авторам оценить влияние внешнего гидростатического подпора на возможность осуществления процесса в режиме гидродинамического трения, однако реологические свойства экструдата и их влияние на характер контактного взаимодействия при этом не учитывали. В работах [90—93] не учтено изменение свойств жидкости в очаге деформации вследствие разогрева, что, согласно данным исследований [94—96], значительно снижает достоверность выводов. Авторы работ [97—98] рассмотрели поведение жидкости в смазочном слое с учетом ее разогрева, однако приняли усредненное значение напряжений трения по ширине слоя, а при определении контактных давлений, аналогично работе [99], пренебрегли силами контактного трения. Усредненное значение напряжений внутреннего трения по ширине смазочного слоя и отсутствие градиента температуры в смазке приняты в работе [100]. К недостаткам анализа [100] можно отнести и тот факт, что авторы принимают условие «опережения» экструдатом рабочей жидкости в контактной зоне. Это допущение противоречит данным работы [88], где на основе теоретического анализа доказана возможность наличия в очаге деформации как зоны опережения, так и зоны отставания экструдата от смазки в контактной области.

В данной главе сделана попытка аналитически установить условия, обеспечивающие ведение процесса гидропрессования в режиме гидродинамического трения, оценить характер силового взаимодействия рабочей жидкости и деформируемого

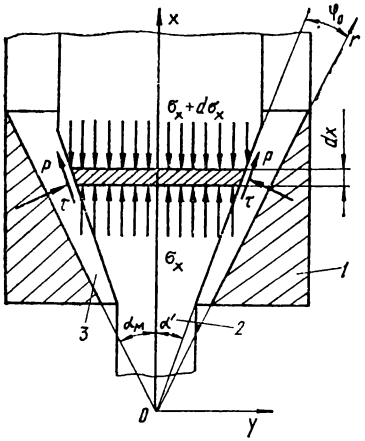

Рис. 55. Схема гидроэкструзии: *1* — матрица; *2* — заготовка; *3* — рабочая жидкость

материала в зоне обжатия при гидроэкструзии труб и прутков, установить уровень влияния инерционных эффектов на параметры высокоскоростной гидроэкструзии, проанализировать особенности завершающей стадии процесса.

В исследованиях использованы основные результаты наиболее фундаментальных работ [85, 86, 88, 89, 97, 101—105], по возможности объединенные и дополненные.

АММ изотермического процесса. Примем следующие допущения о характере течения рабочей жидкости и деформируемого металла (рис. 55) [30]: заготовка подвергается двухосной деформации; при деформации экструдата соблюдается гипотеза «плоских сечений»; параметры смазки отвечают свойствам ньютоновой жидкости; влияние сил инерции незначительно как для жидкости, так и для экструдата.

Определим контактные нормальные напряжения p, воздействующие на экструдат в очаге деформации. Принимая условие пластичности Губера—Мизеса—Генки с учетом экспериментальных данных работы [88], согласно которым $|p| > |\sigma_x|$, получаем $p - \sigma_x = \beta^*\sigma_s$ (здесь σ_x— осевое напряжение) и дифференциальное уравнение равновесия элементарного участка экструдата в очаге деформации[1] в виде

$$\sum \overline{X} = 2\beta^*\sigma_s \operatorname{tg}\alpha' + (R-\Delta)\beta^*\frac{\partial\sigma_s}{\partial x} - (R-\Delta)\frac{\partial p}{\partial x} + 2\tau = 0, \tag{5.1}$$

где α'— угол, характеризующий форму экструдата в очаге деформации, $\alpha' = \alpha_м - \varphi_0$; φ_0— угол, характеризующий форму зазора между экструдатом и матрицей.

Для режима гидродинамического трения на контакте металла и слоя рабочей жидкости

$$\tau = -\mu\left(\frac{\partial v_{жx}}{\partial \Delta_y}\right)_{\Delta_y=\Delta}, \tag{5.2}$$

[1] Сжимающие напряжения считаем положительными, обусловленные ими силы — векторы в выбранной системе координат (аналогично — для скоростей).

где $\Delta_y(y)$ — текущее значение толщины смазочного слоя в данном диаметральном сечении очага ($x = \text{const}$).

С учетом ранее сформулированных допущений справедлива система уравнений [106]

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_{жx}}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial v_{жx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{жy}}{\partial y} = 0. \tag{5.3}$$

Переходя к полярной системе координат ($0r$, φ), решая (5.3) и подставляя граничные условия $\Delta_y = 0$, $v_{жx} = 0$ и $\Delta_y = \Delta$, $v_{жx} = v_м$, получаем

$$v_{жx} = \varphi\left[\frac{\varphi r^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r} + \left(v_м - \frac{r^2\varphi_0^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right)\frac{1}{\varphi_0}\right], \tag{5.4}$$

где $v_м$ — текущее значение осевой скорости металла в очаге.

Из (5.4) имеем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \Delta_y}\right)_{\Delta_y = \Delta} = \frac{1}{r}\left(\frac{r^2\varphi_0}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_0 r_0^2}{\varphi_0 r^2}\right), \tag{5.5}$$

где r_0, r — соответственно координата начала очага деформации и текущая координата.

Подставляя (5.5) в (5.2), записываем

$$\tau = -\left(\frac{r\varphi_0}{2}\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\frac{v_0 r_0^2}{r^3\varphi_0}\right). \tag{5.6}$$

С учетом (5.6) преобразовываем (5.1), переходя к полярной системе координат

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\cos\alpha_м}{\sin\alpha_м - \varphi_0(1-\cos\alpha_м)}\left[\frac{2\beta^*\sigma_s \operatorname{tg}\alpha'}{r} + \right.$$
$$\left. + \left(\operatorname{tg}\alpha_м - \frac{\varphi_0}{\cos^2\alpha_м}\right)\beta^*\frac{\partial\sigma_s}{\partial r} - 2\mu\frac{v_0 r_0^2}{\varphi_0 r^4}\right]. \tag{5.7}$$

Решая (5.7) относительно контактного давления, получаем

$$P = \frac{\cos\alpha_м}{\sin\alpha_м - \varphi_0(1-\cos\alpha_м)}\int_{r_1}^{r}\left[\frac{2\beta^*\sigma_s \operatorname{tg}\alpha'}{r} + \left(\operatorname{tg}\alpha_м - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\varphi_0}{\cos^2\alpha_м}\right)\beta^*\frac{\partial\sigma_s}{\partial r} - \frac{2\mu v_0 r_0^2}{r^4\varphi_0}\right]dr + \beta^*\sigma_{s1} + \sigma_{вн}, \tag{5.8}$$

где r_1 — координата, соответствующая окончанию деформации.

Характер изменения напряжений контактного трения, воздействующих на экструдат и определяемых условием (5.6),

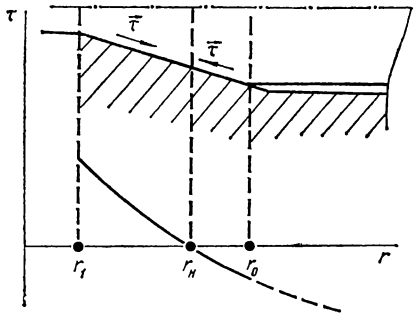

Рис. 56. Эпюра напряжений $\vec{\tau}$

приведен на рис. 56. Из анализа следует, что в очаге деформации может быть сечение, в котором $\tau = 0$. Координата $r_н$ данного сечения может быть определена из (5.5) в соответствии с условием

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_н} = -\frac{2v_0 r_0^2 \mu}{\varphi_0^2 r_н^4}. \tag{5.9}$$

Из анализа следует, что при $r < r_н$ имеет место пассивное гидродинамическое трение (вектор $\vec{\tau}$ направлен против хода прессования), при $r < r_н$ — активное ($\vec{\tau}$ совпадает с направлением прессования). При $r_н > r_0$ и $r_н < r_1$ соответствующие режимы трения распространяются на всю длину очага деформации.

Для рассматриваемого в настоящем анализе плоско-параллельного движения жидкости через зазор малой конусности с одной подвижной стенкой распределение давления по длине зазора описывается законом [101]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\mu}{r^3 \varphi_0^2}\left(\frac{v_0 \varphi_0 r_0^2}{r} + C\right), \tag{5.10}$$

где C — размерная постоянная, зависящая от геометрических параметров очага деформации, давления в контейнере и давления подпора.

Используя (5.9) и (5.7), определяя давление в контейнере ($p_ж$), привлекая (5.8) и (5.10), получаем систему, связывающую параметры формоизменения:

$$\left.\begin{aligned} &A_1 \beta^* r_н^4 \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial r}\right)_{r=r_н} + A_2 \beta^* \sigma_s r_н^3 + 2\mu v_0 r_0^2 \left(\frac{1}{\varphi_0} - A\right) = 0; \\ &p_н = A \int_{r_1}^{r_н} \left[\frac{2\beta^* \sigma_s \operatorname{tg} \alpha'}{r} + \left(\operatorname{tg} \alpha_м - \frac{\varphi_0}{\cos^2 \alpha_м}\right) \beta^* \frac{\partial \sigma_s}{\partial r}\right] dr - \\ &\qquad - \frac{2\mu v_0 r_0^2}{3\varphi_0}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_н^3}\right) + p_1; \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

$$p_{ж} = \frac{2}{r_0^2}\int_{r_1}^{r_0}(p + \tau \operatorname{ctg}\alpha')\, r\, dr + \frac{\sigma_{вн} r_1^2}{r_0^2};$$

$$p_{н} = \frac{-6\mu}{\varphi_0^2}\left[\frac{v_0\varphi_0 r_0^2}{3}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{н}^3}\right) + \frac{C(p_{ж}, \sigma_{вн})}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_{н}^2}\right)\right],$$

где $A = \dfrac{\cos\alpha_{м}}{\sin\alpha_{м} - \varphi_0(1 - \cos\alpha_{м})}$; $A_1 = \varphi_0\left(\operatorname{tg}\alpha_{м} - \dfrac{\varphi_0}{\cos^2\alpha_{м}}\right)A$;

$$A_2 = 2\operatorname{tg}\alpha'\varphi_0 A; \quad p_1 = \beta^*\sigma_{s1} + \sigma_{вн}.$$

Задаваясь величиной φ_0, соответствующей условию разделения поверхностей металла и инструмента в зоне формоизменения,

$$\varphi_0 > (\tilde{\Delta}_{з} + \tilde{\Delta}_{м})\, r_0^{-1};$$
$$\varphi_0 > (\tilde{\Delta}_{и} + \tilde{\Delta}_{м})\, r_1^{-1}, \qquad (5.12)$$

где $\tilde{\Delta}_{з}$, $\tilde{\Delta}_{и}$, $\tilde{\Delta}_{м}$ — соответственно высота микронеровностей на поверхности заготовки, изделия и матрицы, а также величинами $\alpha_{м}$, $\sigma_s(r)$, $r_{п}$, можно рассчитать $p_{ж}$, $p_{н}$, v_0 и $\sigma_{вн}$, обеспечивающие ведение процесса в выбранном режиме гидродинамического трения. При известных из эксперимента величинах $\alpha_{м}$, v_0, $\sigma_{вн}$ решение системы (5.11) позволяет рассчитать величины $p_{н}$, $r_{н}$, φ_0, $p_{ж}$ и оценить, идет ли процесс в режиме гидродинамического трения и каков знак сил трения в очаге деформации.

На рис. 57 приведены результаты расчета параметров процесса по изложенной методике. Анализ расчетных данных показал, что повышение скорости прессования при внешнем воздействии $n_{вн} = \sigma_{вн}/\beta^*\sigma_{s1}$ способствует протеканию процесса в режиме пассивного гидродинамического трения, что должно снижать растягивающие напряжения в очаге деформации и уменьшать тенденцию к образованию трещин на изделии в ходе выпрессовки.

Заменяя текущую по очагу деформации величину $\sigma_s(r)$ средним ее значением $\bar{\sigma}_s$, можно решить систему (5.11) относительно величины зазора между поверхностями заготовки и матрицы в очаге

$$\Delta = \frac{2\mu v_1 (R_0^3 - R_1^3)\, R}{3\mu_{\Sigma} R_1^3 R_0 \operatorname{tg}\alpha_{м}}\left\{2\beta^*\bar{\sigma}_s\left[\ln\frac{R_0}{R_1} - 0{,}5\,(1 - \mu_{\Sigma}^{-1})\right] + \right.$$

$$\left. + \beta^*\sigma_{s1}(1 - \mu_{\Sigma}^{-1}) - \frac{3\mu v_1 (R_1^{-1} - R_0^{-1})}{2\mu_{\Sigma}\cos\alpha_{м}} - p_{ж}\right\}^{-1}. \qquad (5.13)$$

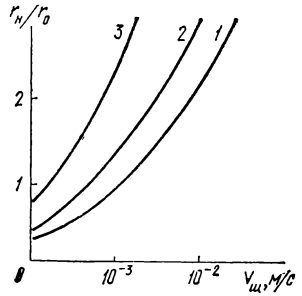

Рис. 57. Зависимость положения нейтрального сечения от скорости прессования при внешнем воздействии $n_{вн}$, равном —0,1 (*1*), 0 (*2*), 0,1 (*3*)

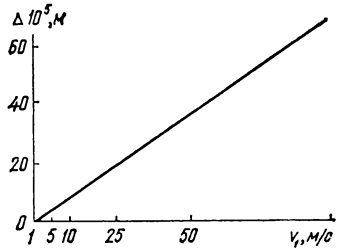

Рис. 58. Зависимость толщины слоя смазки от скорости v_1

Такая методика определения толщины смазочного слоя защищена авторским свидетельством [107]. На рис. 58 показано изменение расчетного значения Δ с увеличением скорости прессования. Как следует из приведенных данных, увеличение скорости прессования резко увеличивает толщину смазочного слоя, что должно способствовать улучшению качества изделий вследствие протекания процесса в режиме жидкостного трения.

АММ неизотермического процесса. Ниже сделана попытка создать математическую модель процесса гидроэкструзии, учитывающую изменение механических свойств экструдата по длине очага деформации вследствие разогрева и упрочнения; влияние давления в контейнере на механические свойства экструдата; изменение свойств рабочей жидкости по длине смазочного слоя в очаге деформации вследствие изменения давления и разогрева; изменение сил внутреннего трения по ширине смазочного слоя; возможность наличия в очаге деформации зон опережения и отставания экструдата от граничного слоя смазки (зон активного и пассивного трения).

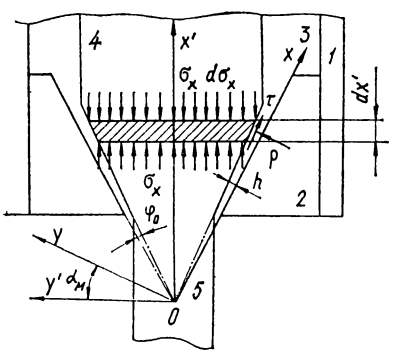

Рис. 59. Схема очага деформации:
1 — контейнер; *2* — матрица; *3* — рабочая жидкость; *4* — заготовка; *5* — изделие

Кроме приведенных выше приняты допущения: теплопроводность смазки в очаге деформации постоян-

на; теплопередача в направлении движения смазки и экструдата отсутствует (гипотеза Буссинеска); теплоемкость деформируемого материала в зоне формоизменения постоянна; распределение температуры в экструдате в данном поперечном сечении очага деформации равномерно.

Согласно принятым допущениям, скорость осевого течения жидкости в смазочном слое (рис. 59) и ее температура связаны системой уравнений [97, 98, 106]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu_0 \exp\left[\bar{\alpha}p - \bar{\beta}(\theta - \theta_0)\right]\frac{\partial v_{жx}}{\partial y}\right\} = \frac{\partial p}{\partial x}; \qquad (5.14а)\\ &\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{\mu_0 \exp\left[\bar{\alpha}p - \bar{\beta}(\theta - \theta_0)\right]}{k_t}\left(\frac{\partial v_{жx}}{\partial y}\right)^2, \qquad (5.14б)\end{aligned}\right\}$$

где p — давление смазки в данном сечении слоя ($x = \text{const}$); $\theta\ (x, y)$ — температура смазки в данной точке слоя.

Решение системы уравнений (5.14) возможно при замене значения температуры θ средней величиной

$$\theta_{ср} = \frac{1}{x_0 - x_1}\int_{x_1}^{x_0}\left(\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta}\theta\, dy\right)dx, \qquad (5.15)$$

где x_0, x_1— соответственно координаты точек начала и конца зоны формоизменения экструдата.

С учетом условия (5.15) решение системы уравнений (5.14 а, б) примет вид

$$\frac{\partial v_{жx}}{\partial y} = \frac{y}{\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1; \qquad (5.16)$$

$$v_{жx} = \frac{y^2}{2\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1 y + C_2; \qquad (5.17)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\mu_{ср}}{k_t}\left[\left(\frac{1}{\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x}C_1 + yC_1^2 + C_3\right]; \qquad (5.18)$$

$$\theta = -\frac{\mu_{ср}}{k_t}\left[\left(\frac{1}{\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\frac{y^4}{12} + \frac{y^3}{3\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x}C_1 + \frac{y^2}{2}C_1^2 + yC_3 + C_4\right], \qquad (5.19)$$

где $\mu_{ср} = \mu_0 \exp\left[\bar{\alpha}p - \bar{\beta}(\theta_{ср} - \theta_0)\right]$.

Постоянные интегрирования определятся из граничных условий $y = 0$; $\theta = \theta_и$; $v_{жx} = 0$; $y = \Delta$; $\theta = \theta_м$; $v_{жx} = v_м \cos\alpha_м$, где $\theta_м$, $\theta_и$ — соответственно температуры металла и инструмента.

Используя граничные условия, из (5.16) — (5.19) получаем

$$C_1 = \frac{1}{\Delta}\left(v_и \cos\alpha_м - \frac{\Delta^2}{2\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x}\right); \qquad (5.20)$$

$$C_2 = 0; \qquad (5.21)$$

$$C_3 = -\frac{1}{\Delta}\left[\frac{k_t}{\mu_{ср}}(\theta_м - \theta_н) + \left(\frac{1}{\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 \frac{\Delta^4}{12} + \right.$$
$$+ \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\Delta^2}{3\mu_{ср}}\left(v_м \cos\alpha_м - \frac{\Delta^2}{12\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x}\right) +$$
$$\left. + 0{,}5\left(v_м \cos\alpha_м - \frac{\Delta^2}{2\mu_{ср}}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\right]; \qquad (5.22а)$$

$$C_4 = -\frac{\theta_н k_t}{\mu_{ср}}. \qquad (5.22б)$$

Уравнение статического равновесия элементарного объема экструдата, выделенного в очаге деформации двумя бесконечно близкими плоскостями, которые проходят перпендикулярно к оси прессования Ox', имеет вид

$$2p \operatorname{tg}\alpha_м\, dx' + 2\tau\, dx' - R_x\, d\sigma_x - 2\sigma_x \operatorname{tg}\alpha_м\, dx' = 0, \qquad (5.23)$$

где R_x — радиус экструдата, $R_x = R - \frac{\Delta}{\cos\alpha_м}$; $R = x' \operatorname{tg}\alpha_м$.

Принимая условие пластичности Губера — Мизеса — Генки и переходя к системе координат xOy (см. рис. 59), после преобразования (5.23) получаем дифференциальное уравнение статического равновесия в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{2\sigma_s}{x - \Delta \operatorname{ctg}\alpha_м} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} + \frac{2\tau}{x \operatorname{tg}\alpha_м - \Delta}\right) = 0. \qquad (5.24)$$

Величина напряжения контактного трения, входящая в выражение (5.24), может быть определена в соответствии с условием (5.2), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\tau = -\mu_{ср}\left(\frac{\partial v_{жx}}{\partial y}\right)_{y=\Delta} \qquad (5.25)$$

(знак «минус» обусловлен тем, что в системе xOy положительным направлением считается направление в сторону поверхности заготовки).

Подставляя в (5.25) определенное ранее значение производной (5.16), получаем для контактной зоны

$$\tau = -\left(\frac{\Delta}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_0 \mu_{ср} R_0^2 \cos\alpha_м}{\Delta R_x^2}\right). \qquad (5.26)$$

С учетом (5.26) преобразуем (5.24) к виду

$$\left(1 + \frac{\Delta}{x \operatorname{tg}\alpha_м - \Delta}\right) dp - \left\{\frac{2\sigma_s \operatorname{tg}\alpha_м}{x \operatorname{tg}\alpha_м - \Delta} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - \frac{2v_0 R_0 \mu_0 \exp\left[\bar{\alpha}p - \bar{\beta}(\theta_{ср} - \theta_0)\right]}{(x \operatorname{tg}\alpha_м - \Delta)^3 \Delta \cos\alpha_м}\right\} dx = 0. \qquad (5.27)$$

Решая (5.27) методом нахождения общего интегрирующего множителя, получаем интеграл, связывающий значения контактного давления с положением сечения в очаге деформации функцией

$$\left(1+\frac{\Delta_1}{x_1\operatorname{tg}\alpha_м-\Delta}\right)\int\limits_{\sigma_{s_1}+\sigma_{вн}}^{p}\exp\{-A\exp[\bar{\alpha}p-$$

$$-\bar{\beta}(\theta_{ср}-\theta_0)]\}\,dp-\int\limits_{x_1}^{x}\left\{\left[\frac{2\sigma_s\operatorname{tg}\alpha_м}{x\operatorname{tg}\alpha_м-\Delta}+\frac{\partial\sigma_s}{\partial x}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2v_0R_0^2\mu_0\exp[\bar{\alpha}p-\bar{\beta}(\theta_{ср}-\theta_0)](x_1\operatorname{tg}\alpha_м-\Delta_1)^{\Delta_1}}{(x\operatorname{tg}\alpha_м-\Delta)^3\,\Delta\cos\alpha_м\,(x\operatorname{tg}\alpha_м-\Delta)^{\Delta}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[\frac{A_1}{(x\operatorname{tg}\alpha_м-\Delta)^2}\right]\right\}dx=0, \qquad (5.28)$$

где $x_1=\dfrac{R_1\cos\alpha_м+\Delta_1}{\sin\alpha_м\cos\alpha_м}-\Delta_1\operatorname{tg}\alpha_м$; Δ_1 — толщина слоя смазки в конце очага деформации; $\sigma_{вн}=\dfrac{P_{вн}}{F_и}$; $P_{вн}$ — внешнее осевое усилие, приложенное к изделию; $F_и$ — площадь поперечного сечения изделия плоскостью, перпендикулярной к оси прессования $O\bar{x}'$;

$$A_1=\frac{v_0R_0^2\bar{\alpha}\mu_0}{(x_1\operatorname{tg}\alpha_м-\Delta)^2\,\Delta\sin\alpha_м};$$

$$A=\frac{v_0R_0^2\bar{\alpha}\mu_0\exp[\bar{\alpha}p-\bar{\beta}(\theta_{ср}-\theta_0)]}{\Delta\sin\alpha_м}.$$

Подставляя (5.19) в (5.15), после интегрирования по dy получаем выражение, связывающее величины $\theta_{ср}$ и p соотношением

$$\theta_{ср}=\frac{0{,}5}{x_0-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_0}\left\{\theta_м+\theta_и+\frac{1}{2k_l}\left[\frac{\Delta^4(p')^2}{10\mu_0\exp[\bar{\alpha}p-\bar{\beta}(\theta_{ср}-\theta_0)]}+\right.\right.$$

$$+\frac{\Delta^2p'}{3}\left(v_м\cos\alpha_м-\frac{\Delta^2p'}{2\mu_0\exp[\bar{\alpha}p-\bar{\beta}(\theta_{ср}-\theta_0)]}\right)+$$

$$+\frac{\mu_0\exp[\bar{\alpha}p-\bar{\beta}(\theta_{ср}-\theta_0)]}{3}\times$$

$$\left.\left.\times\left(v_м\cos\alpha_м-\frac{\Delta^2p'}{2\mu_0\exp[\bar{\alpha}p-\bar{\beta}(\theta_{ср}-\theta_0)]}\right)^2\right]\right\}dx, \qquad (5.29)$$

где $p' = \dfrac{x \operatorname{tg} \alpha_м - \Delta}{x \operatorname{tg} \alpha_м} \left\{ \dfrac{2\sigma_s \operatorname{tg} \alpha_м}{x \operatorname{tg} \alpha_м - \Delta} + \dfrac{\partial \sigma_s}{\partial x} - \right.$

$\left. - \dfrac{2v_0 R_0^2 \mu_0 \exp\left[\bar{\alpha} p - \bar{\beta}\left(\theta_{ср} - \theta_0\right)\right]}{(x \operatorname{tg} \alpha_м - \Delta)^3 \Delta \cos \alpha_м} \right\}$; $\quad x_0 = \dfrac{R_0 \cos \alpha_м + \Delta_0}{\sin \alpha_м \cos \alpha_м} -$

$- \Delta_0 \operatorname{tg} \alpha_м$; $k_t = \text{const}$; $\theta_м = \theta_м(x)$; $\theta_и = \theta_и(x)$; Δ_0 — толщина слоя смазки в начале очага деформации.

При известных законах изменения напряжения текучести σ_s и температуры материала $\theta_м$ совместное решение уравнений (5.28) и (5.29) позволяет определить величины давления p и средней температуры $\theta_{ср}$ в любой точке очага деформации. Величина σ_s может быть определена как функция параметров процесса — температуры, степени и скорости деформации в соответствии с зависимостью (2.28). Примем за основу кривую упрочнения, описываемую выражением

$$\sigma_s = \sigma_{к1} + \eta_\delta \ln \frac{\delta_\Sigma}{\delta_0}, \tag{5.30}$$

где $\sigma_{к1} = \sigma_{т0}\left[\gamma_p p_ж + \lambda_\theta\left(\theta_м - \theta_1\right)\right]$.

Анализ выражения (5.30) показал, что для получения замкнутого решения система уравнений (5.28), (5.29) должна быть дополнена уравнением, связывающим величину давления в контейнере с параметрами процесса:

$$p_ж = \frac{2}{R_0^2} \int_{x_1}^{x_0} \left\{ p \sin \alpha_м - \left[\frac{\Delta}{2} p' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{R_0^2 v_0 \mu_0 \exp\left[\bar{\alpha} p - \bar{\beta}\left(\theta_{ср} - \theta_0\right)\right]}{\Delta (x \operatorname{tg} \alpha_м - \Delta)^3 \cos \alpha_м} \right] \cos \alpha_м \right\} (x \sin \alpha_м -$$

$$- \Delta \cos \alpha_м)\, dx + \frac{P_{вн}}{\pi R_0^2}. \tag{5.31}$$

Дифференцируя (5.30), получаем

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = \sigma_{т0} \lambda_\theta \frac{\partial \theta_м}{\partial x} - 2\eta_\delta \frac{\operatorname{tg} \alpha_м - \dfrac{\partial \Delta}{\partial x}}{x \operatorname{tg} \alpha_м - \Delta}. \tag{5.32}$$

Температура экструдата в очаге деформации может быть рассчитана на основании условия, что около 90 % энергии формоизменения идет на разогрев материала [15]. В этом случае текущее значение температуры экструдата определится как

$$\theta_м = \theta_{к1} + 0{,}9 \frac{1}{\rho c_V} \int_0^{\delta_\Sigma(x)} \sigma_s(x)\, d\delta_\Sigma, \tag{5.33}$$

где $\theta_{к1}$ — температура заготовки в контейнере пресса.

Заменяя в (5.33) пределы интегрирования с учетом условия

$$\delta_{\Sigma} = \ln\left[\frac{R_0^2}{(x\sin\alpha_{\text{м}} - \Delta\cos\alpha_{\text{м}})^2}\right],$$

получаем

$$\theta_{\text{м}} = \theta_{\text{кл}} + \frac{1{,}8}{\rho c_V}\int_{x}^{x_0}\frac{\sigma_s\left(\operatorname{tg}\alpha_{\text{м}} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial x}\right)}{x\operatorname{tg}\alpha_{\text{м}} - \Delta}\,dx. \qquad (5.34)$$

Дифференцируя (5.34) и подставляя результат в (5.32), после преобразований получаем окончательное выражение для определения производной предела текучести по координате x

$$\sigma_s' = \left(\frac{0{,}9\sigma_s\sigma_{\text{т}0}\lambda_\theta}{\rho c_V} + \eta_\delta\right)\frac{2\left(\operatorname{tg}\alpha_{\text{м}} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial x}\right)}{\Delta - x\operatorname{tg}\alpha_{\text{м}}}. \qquad (5.35)$$

В анализе реального процесса вполне приемлема замена

$$\theta_{\text{и}} = \bar{\nu}\theta_{\text{м}}, \qquad (5.36)$$

где $\bar{\nu}$ — эмпирический коэффициент, характеризующий условия теплоотвода от рабочей поверхности инструмента.

Изменение толщины слоя смазки по длине очага деформации может быть задано законом [88, 100]

$$\Delta = x\operatorname{tg}\varphi_0, \qquad (5.37)$$

где φ_0 — угол между образующими матрицы и заготовки в очаге деформации, $\varphi_0 = \alpha_{\text{м}} - \alpha_{\text{з}}$; $\alpha_{\text{з}}$ — полуугол конусности заготовки в очаге деформации.

При известных кинематических (v_0), технологических ($P_{\text{вн}}$, $\alpha_{\text{м}}$, $\theta_{\text{кл}}$, $\bar{\nu}$), деформационных (R_0, R_1) и реологических (μ_0, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\sigma_{\text{т}0}$, λ_θ, γ_p, η_δ, k_t) параметрах процесса системы уравнений (6.28), (6.29), (6.31) включают четыре неизвестных: p, $\theta_{\text{ср}}$, $p_{\text{ж}}$, $\Delta(\varphi_0)$. Решение системы при экспериментально установленном давлении $p_{\text{ж}}$ позволяет оценить режим трения в очаге деформации по толщине смазочного слоя Δ. При заданной необходимой величине $\Delta(\varphi_0)$ можно рассчитать $p_{\text{ж}}$, обеспечивающее ведение процесса с требуемым режимом подачи смазки в очаг деформации. Решение системы, описывающей процесс формоизменения экструдата и течение жидкости в смазочном слое, позволяет рассчитать значения параметров формоизменения в любом сечении очага деформации.

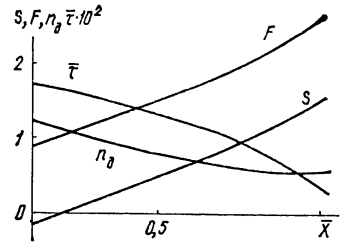

Рис. 60. Расчетные значения параметров гидроэкструзии

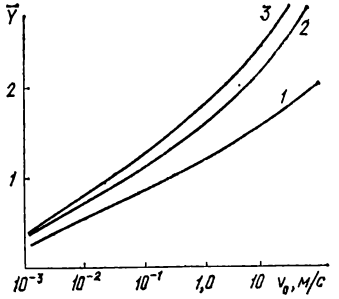

Рис. 61. Зависимость безразмерного параметра $\bar{Y}$ от скорости v_0 при $n_{вн}$, равном —0,2 (*1*), 0 (*2*), —0,2 (*3*)

На рис. 60 приведена типичная расчетная картина изменения безразмерных параметров $S = \frac{\sigma_x}{\sigma_s}$; $F = \frac{p}{\sigma_s}$; $\bar{\tau} = \frac{\tau}{p}$; $n_д = \frac{\sigma_s}{p_ж}$ по длине очага деформации, характеризуемой безразмерным параметром $\bar{X} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$.

Для приведенных на рис. 60 графиков принимали $n_{вн} = \frac{\sigma_{вн}}{\beta^* \sigma_{s1}} = 0{,}1$; $R_0^2 R_1^2 = 3{,}5$; $v_0 = 10^{-3}$ м/с; $\sigma_{т0} = 40$ МПа.

Анализ результатов расчета по приведенной методике показал, что повышение скорости прессования увеличивает, при прочих равных условиях, толщину смазочного слоя (φ_0), что должно способствовать повышению качества изделий.

Расчет по приведенной выше методике позволяет определить силовые параметры гидроэкструзии с учетом разогрева экструдата и изменения реологических свойств металла и жидкости в очаге деформации. Кроме того, исходя из условия обеспечения режима жидкостного трения в очаге деформации (5.12), можно определить параметры процесса, обеспечивающие соблюдение указанного условия и гарантирующие высокое качество изделий (рис. 61).

2. Контактное взаимодействие и параметры формоизменения при гидроэкструзии цилиндрических труб

АММ процесса оправочной гидроэкструзии. Проблема выбора оптимальных технологических параметров гидроэкструзии труб неразрывно связана с решением задачи о формировании смазочной пленки между заготовкой и инструментом.

Режим течения рабочей жидкости во многом определяет как значения контактных напряжений и полного усилия прессования, так и возможности осуществления деформации без разрушения трубчатого изделия на выходе из очка матрицы. Используя общие положения, примененные для анализа условий контактного взаимодействия при гидроэкструзии прутков, а также результаты исследования [106], разработаем математическую модель процесса оправочной гидроэкструзии труб.

В основу модели заложены следующие физические представления о характере процессов, имеющих место при гидроэкструзии труб на оправке (рис. 62). Под действием прессштемпеля *1*, движущегося вдоль оси прессования *Z* со скоростью $v_ш$, рабочая жидкость *2*, сжатая в плоскости заднего торца заготовки с координатой $z_з$ до давления $p_ж$ $\left(\frac{\partial p_ж}{\partial S_т} = 0\right.$, где $S_т$ — поверхность, совпадающая с плоскостью заднего торца заготовки), выпрессовывается из контейнера пресса *3* в зазоры $\Delta_н$ (между матрицей *4* и заготовкой *5*) и $\Delta_в$ (между оправкой *6* и заготовкой). Пластическая деформация заготовки начинается в плоскости с координатой $z_п$, определяемой из условия $R_0 = R(z)$. Заканчивается пластическая деформация на границе калибрующего участка *7* и профилированной части матрицы; координата плоскости окончания пластической деформации — $z_{к1}$.

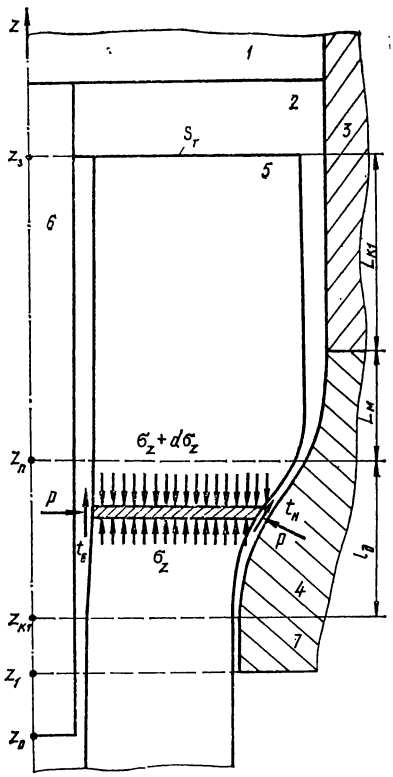

Рис. 62. Схема гидроэкструзии трубы на оправке

Принимая допущение об установившемся характере движения рабочей жидкости, используем для анализа ее течения уравнение Рейнольдса

$$\nabla^2 v_ж = \frac{1}{\mu} p', \qquad (5.38)$$

где $p' = \frac{\partial p}{\partial z}$.

Считая, что рабочая жидкость отвечает свойствам ньютоновой жидкости, используем уравнение (5.38) при решении рассматриваемой задачи. При этом выражение (5.38) справедливо лишь для течения в трубчато-цилиндрическом канале. Течение в конфузорных каналах, каковыми являются $\Delta_н$, $\Delta_в$ в зоне пластического формоизменения, неустановившееся и может быть описано уравнениями Л. Д. Ландау, однако в этом случае решение задачи о совместном течении металла и рабочей жидкости в силу математических трудностей становится практически неосуществимым. Учитывая, что угол конусности реально используемых при гидроэкструзии матриц невелик, а конусность зазора между металлом и инструментом весьма мала, будем считать допустимым использование выражения (5.38) в дальнейших выкладках.

Решая дифференциальное уравнение (5.38) аналогично решению Прандтля, получаем для калибровочного участка очага деформации соотношения (здесь и далее индекс «Н» относится к зазору наружному $\Delta_н$, индекс «в» — к зазору внутреннему $\Delta_в$):

$$\bar{w}_н = (\bar{R}_{к1} - \bar{R})\left[\frac{(1-\bar{R})}{4\bar{R}_{к1}^2\bar{R}_ш^2}\bar{p}'_н + \frac{\bar{v}_н}{\bar{R}_{к1}-1}\right]; \qquad (5.39)$$

$$\bar{w}_в = (\bar{r} - 1)\left[\frac{(\bar{r}-\bar{r}_т)\,\bar{R}_{оп}^2}{4}\bar{p}'_в + \frac{\bar{v}_в - \bar{v}_{оп}}{\bar{r}_т - 1}\right] + \bar{v}_{оп}, \qquad (5.40)$$

где

$$\bar{w}_н = \frac{w_н}{v_ш}; \quad \bar{w}_в = \frac{w_в}{v_ш}; \quad \bar{R}_{к1} = \frac{R_{к1}}{R_т};$$

$$\bar{R} = \frac{r}{R_т}; \quad \bar{R}_{оп} = \frac{R_{оп}}{R_ш}; \quad \bar{R}_ш = \frac{R_ш}{R_{к1}};$$

$$\bar{r} = \frac{r}{R_{оп}}; \quad \bar{r}_т = \frac{r_т}{R_{оп}}; \quad \bar{v}_н = \frac{v_н}{v_ш};$$

$$\bar{v}_в = \frac{v_в}{v_ш}; \quad \bar{v}_{оп} = \frac{v_{оп}}{v_ш}; \quad \bar{p}'_н = \frac{p'_н}{m_p};$$

$$\bar{p}'_в = \frac{p'_в}{m_p}; \quad m_p = \mu\frac{v_ш}{R_ш}; \quad w_н = (v_ж)_н; \quad w_в = (v_ж)_в;$$

$R_{к1}$, $R_т$ — радиусы соответственно внешней и внутренней образующих канала $\Delta_н$; $r_т$ — радиус внешней образующей канала $\Delta_в$; $v_{оп}$ — скорость поверхности оправки, являющейся внутренней образующей канала $\Delta_в$; $v_н$ — скорость наружной поверхности заготовки, являющейся внутренней образующей канала $\Delta_н$; $v_в$ — скорость внутренней поверхности заготовки, являющейся внешней образующей канала $\Delta_в$.

Условия несжимаемости рабочей жидкости в каналах $\Delta_н$, $\Delta_в$ можно записать в виде уравнений постоянства секундных расходов $Q_н$, $Q_в$:

$$\bar{Q}_н = \frac{2}{\bar{R}_{к1}^2 \bar{R}_ш^2} \int_1^{\bar{R}_{к1}} \bar{w}_н \bar{R}\, d\bar{R}; \tag{5.41}$$

$$\bar{Q}_в = 2\bar{R}_{оп}^2 \int_1^{\bar{r}_т} \bar{w}_в \bar{r}\, d\bar{r}, \tag{5.42}$$

где $\bar{Q}_н = \dfrac{Q_н}{\pi v_ш R_ш^2}$; $\bar{Q}_в = \dfrac{Q_в}{\pi v_ш R_ш^2}$.

Принимая в качестве упрощающего допущения условие усреднения скоростей осевого течения металла в каждом из диаметральных сечений заготовки

$$v_н = v_в = v_т, \tag{5.43}$$

из совместного условия несжимаемости металла и жидкости получаем значение средней осевой скорости металла

$$\bar{v}_т = \frac{v_т}{v_ш} = \frac{(1 - \bar{Q}_н - \bar{Q}_в - \bar{v}_{оп}\bar{R}_{оп}^2)\, \bar{R}_{к1}^2 \bar{R}_ш^2}{1 - \bar{r}_т^2 \bar{R}_{оп}^2 \bar{R}_{к1}^2 \bar{R}_ш^2}. \tag{5.44}$$

Сдвигающие напряжения τ на границе рабочей жидкости и металла с учетом векториальности определяем из уравнений Стокса

$$\bar{\tau}_н = \bar{R}_ш \bar{R}_{к1} \frac{\partial \bar{w}_н}{\partial \bar{R}}\bigg|_{\bar{R}=1}; \tag{5.45}$$

$$\bar{\tau}_в = -\frac{1}{\bar{R}_{оп}} \frac{\partial \bar{w}_в}{\partial \bar{r}}\bigg|_{\bar{r}=\bar{r}_т}, \tag{5.46}$$

где $\bar{\tau}_н = \dfrac{\tau_н}{m_p}$; $\bar{\tau}_в = \dfrac{\tau_в}{m_p}$.

В соответствии с исходно принятыми допущениями в сечении $z_{к1}$ должно выполняться условие пластического течения материала заготовки в виде системы уравнений

$$\bar{p}_{н.к} - \bar{s}_{к1} = \bar{\sigma}_{sк} + \bar{\sigma}_{вн}; \tag{5.47}$$

$$\bar{p}_{в.к} - \bar{s}_{к1} = \bar{\sigma}_{sк} + \bar{\sigma}_{вн}, \tag{5.48}$$

где $\bar{p}_{н.к}$ — безразмерное давление в наружном зазоре в конце очага деформации, $\bar{p}_{н.к} = \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_{к1}} \bar{p}_н' \, d\bar{z} + \bar{\sigma}$; $\bar{p}_{в.к}$ — безразмерное

давление во внутреннем зазоре в конце очага деформации.

$$\bar{p}_{\text{в. к}} = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}_{\text{кл}}} \bar{p}'_{\text{в}}\, d\bar{z} + \bar{\sigma};$$

$$\bar{z} = \frac{z}{R_{\text{ш}}};\quad \bar{z}_{\text{кл}} = \frac{z_{\text{кл}}}{R_{\text{ш}}};\quad \bar{z}_1 = \frac{z_1}{R_{\text{ш}}};\quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{m_p};\quad \bar{z}_0 = \frac{z_0}{R_{\text{ш}}};$$

$$\bar{s}_{\text{кл}} = \frac{2\bar{R}^2_{\text{кл}}\bar{R}^2_{\text{ш}}}{1 - \bar{r}^2_{\text{т}}\bar{R}^2_{\text{кл}}\bar{R}^2_{\text{ш}}\bar{R}^2_{\text{оп}}} \left(\int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_{\text{кл}}} \frac{\bar{\tau}_{\text{н}}}{\bar{R}_{\text{кл}}\bar{R}_{\text{ш}}}\, d\bar{z} + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}_{\text{кл}}} \bar{R}_{\text{оп}}\bar{r}_{\text{т}}\bar{\tau}_{\text{в}}\, d\bar{z} \right);$$

$$\bar{\sigma}_{\text{sк}} = \frac{\sigma_{\text{sк}}}{m_p};\quad \bar{\sigma}_{\text{вн}} = \frac{\sigma_{\text{вн}}}{m_p};$$

σ — внешнее гидростатическое противодавление; z_1, z_0— координаты соответственно сечений конца калибровочного пояска и переднего торца оправки; $\sigma_{\text{sк}}$— напряжение текучести деформируемого материала на выходе из зоны пластического формоизменения.

Уравнения (5.39), (5.48) включают 11 неизвестных: $\bar{\omega}_{\text{в}}$, $\bar{\omega}_{\text{н}}$, $\bar{Q}_{\text{в}}$, $\bar{Q}_{\text{н}}$, $\bar{v}_{\text{т}}$, $\bar{p}'_{\text{в}}$, $\bar{p}'_{\text{н}}$, $\bar{\tau}_{\text{в}}$, $\bar{\tau}_{\text{н}}$, $\bar{R}_{\text{кл}}$, $\bar{r}_{\text{т}}$. Пренебрегая упругими деформациями инструмента и металла, в соответствии с ранее принятыми допущениями в зоне калибровочного участка $\bar{R}_{\text{кл}}$, $\bar{r}_{\text{т}}$ можно считать постоянными. В этом случае системы уравнений (5.39) — (5.42) , (5.44) — (5.48) приобретают алгебраический вид и путем взаимных подстановок приводятся к системе уравнений

$$\bar{Q}_{\text{н}} = \bar{Q}_{\text{н}}(\bar{R}_{\text{кл}},\ \bar{r}_{\text{т}}); \qquad (5.49)$$

$$\bar{Q}_{\text{в}} = \bar{Q}_{\text{в}}(\bar{R}_{\text{кл}},\ \bar{r}_{\text{т}}). \qquad (5.50)$$

Дальнейшее решение задачи сводится к определению четырех неизвестных величин $\bar{Q}_{\text{н}}$, $\bar{Q}_{\text{в}}$, $\bar{R}_{\text{кл}}$, $\bar{r}_{\text{т}}$, из которых две последние характеризуют геометрию каналов между металлом и инструментом. Дифференциальное уравнение равновесия элементарного объема металла, выделенного в зоне пластического формоизменения двумя бесконечно близкими диаметральными плоскостями, с учетом ранее принятых допущений можно записать в виде

$$(\tilde{R}_2^2 - \tilde{R}_1^2)\,\sigma'_z + 2\,[(\tilde{R}_1\tilde{R}'_1 + \tilde{R}_2\tilde{R}'_2)\,\sigma_z + (\tilde{R}_1 \sin \operatorname{arctg} \tilde{R}'_1 - \tilde{R}_2 \sin \operatorname{arctg} \tilde{R}'_2)\,p - \tau_{\text{в}}\tilde{R}_1 \cos \operatorname{arctg} \tilde{R}'_1 - \tau_{\text{н}}\tilde{R}_2 \cos \operatorname{arctg} \tilde{R}'_2] = 0, \qquad (5.51)$$

где $\tilde{R}_1(z)$, $\tilde{R}_2(z)$ — функции изменения радиусов образующих внутренней и внешней поверхностей заготовки в очаге деформации.

Объединяя уравнение (5.51) с уравнением пластичности (сжимающие напряжения считаем положительными)

$$p - \sigma_z = \sigma_s(z) \tag{5.52}$$

и приводя полученное уравнение к безразмерному виду, получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\bar{p}' + \Phi_1 \bar{p} = \Phi_2, \tag{5.53}$$

где Φ_1, Φ_2 — функции, включающие $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$, $\tilde{R}_1'$, $\tilde{R}_2'$, $\bar{\tau}_н$, $\bar{\tau}_в$.

Объединяя (5.53) с уравнениями (5.49), (5.50) и уравнениями (5.45), (5.46), приведенными к виду

$$\bar{\tau}_н = \bar{\tau}_н(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \bar{p}_н' = \bar{p}'); \tag{5.54}$$

$$\bar{\tau}_в = \bar{\tau}_в(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \bar{p}_в' = \bar{p}'), \tag{5.55}$$

получаем «замкнутую» относительно трех неизвестных ($\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$, $\bar{p}$) систему дифференциальных уравнений, включающую величины $R_{к1}$, $r_т$, которые совместно с величиной $\bar{p}_0 = \bar{p}_{н.к} = \bar{p}_{в.к}$ являются постоянными интегрирования.

Поведение жидкости в зазорах между инструментом и недеформируемой заготовкой в зонах матрицы ($L_м$) и контейнера ($L_{к1}$) определяется с использованием тех же выкладок, которые были приведены выше для зоны калибровочного участка. В результате можно получить выражения для $\bar{p}_н'$, $\bar{p}_в'$, $\bar{\tau}_н$, $\bar{\tau}_в$ на каждом из участков $L_м$, $L_{к1}$. Давление $p_ж$, действующее на задний торец заготовки, определим из выражения

$$\bar{p}_ж = \int_{\bar{z}_{к1}}^{\bar{z}_п} \bar{p}'\,d\bar{z} + \frac{2}{\bar{R}_0^2 - \bar{r}_з^2} \int_{\bar{z}_п}^{\bar{z}_з} (\bar{R}_0 \bar{\tau}_н + \bar{r}_з \bar{\tau}_в)\,d\bar{z} + \bar{p}_0 - \bar{\sigma}_{s0}, \tag{5.56}$$

где $\bar{p}_ж = \frac{p_ж}{m_p}$; $\bar{\sigma}_{s0} = \frac{\sigma_{s0}}{m_p}$; $\bar{R}_0 = \frac{R_0}{R_ш}$; $\bar{r}_з = \frac{\rho_в}{R_ш}$.

Давление жидкости в плоскости заднего торца заготовки для каждого из каналов в отдельности определится из выражений

$$\bar{p}_{н.з.т} = \int_{L_д} \bar{p}_н' d\bar{z} + \int_{L_м} \bar{p}_н' d\bar{z} + \int_{L_{к1}} \bar{p}_н' d\bar{z} + \bar{p}_0; \tag{5.57}$$

$$\bar{p}_{в.з.т} = \int_{L_д} \bar{p}_в' d\bar{z} + \int_{L_м} \bar{p}_в' d\bar{z} + \int_{L_{к1}} \bar{p}_в' d\bar{z} + \bar{p}_0. \tag{5.58}$$

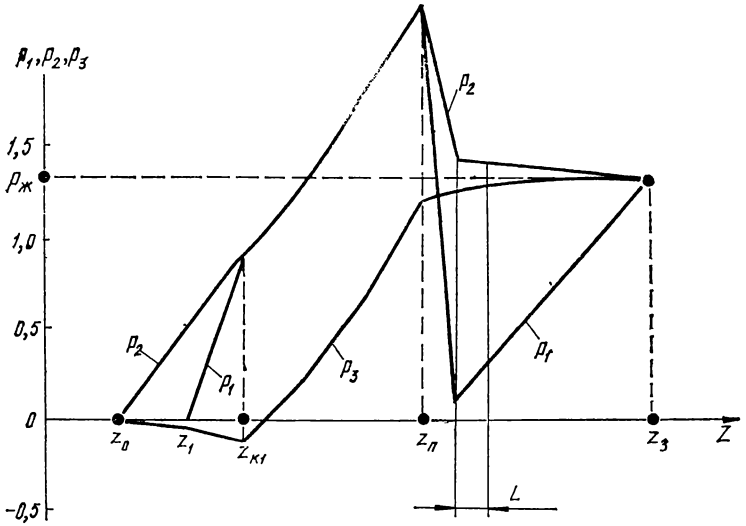

Рис. 63. Расчетные значения параметров гидроэкструзии трубы

В соответствии со сформулированным ранее условием в плоскости заднего торца заготовки выполняется равенство

$$\bar{p}_{\text{н. з. т}} = \bar{p}_{\text{в. з. т}} = \bar{p}_{\text{ж}}. \qquad (5.59)$$

Преобразовав (5.57), (5.58) с учетом (5.59), получим окончательно замкнутую относительно всех неизвестных (в том числе $\bar{R}_{\text{к1}}$, $\bar{r}_{\text{т}}$) систему уравнений.

Реализацию приведенной выше математической модели осуществляли на ЭВМ ЕС-1033, используя при решении дифференциальных уравнений метод коллокации.

На рис. 63 приведена типичная расчетная картина распределения относительных давлений жидкости $p_1 = \frac{p_{\text{н}}(z)}{\sigma_s(z)}$; $p_2 = \frac{p_{\text{в}}(z)}{\sigma_s(z)}$ и осевого напряжения в металле $p_3 = \frac{\sigma_z(z)}{\sigma_s(z)}$ для случая деформации стальных труб при малом (порядка 0,05—0,1 мм) зазоре между оправкой и заготовкой и диаметре контейнера, превышающем диаметр заготовки на 1—5 мм. Как следует из приведенных данных, на некоторой длине L перед входом заготовки в матрицу имеет место зона, где $p_3 - p_1 \geqslant 1$. Это свидетельствует о том, что на участке L имеется предпосылка к пластическому сжатию заготовки напряжениями σ_z. Экспериментально этот факт отмечен в работе [70].

Результаты многочисленных расчетов позволяют сделать ряд представляющих интерес для практики выводов.

1. Как следует из анализа размерностей разработанной математической модели, все расчетные величины зависят от критерия $\lambda_э = \mu v_ш$, одновременно характеризующего кинематические параметры процесса и используемую рабочую жидкость.

2. Зазор между матрицей и заготовкой всегда больше, чем зазор между заготовкой и оправкой ($\Delta_н > \Delta_в$) в зонах деформации и калибровочного участка. С увеличением $\lambda_э$ отношение $\Delta_н/\Delta_в$ уменьшается.

3. При прессовании без противодавления ($\sigma = 0$) на калибровочном участке всегда имеет место зона с наличием осевых растягивающих напряжений ($s_к < 0$). С увеличением $\lambda_э$ абсолютная величина $s_{к1}$ несколько падает. По длине очага деформации возможно наличие нескольких зон с растягивающими напряжениями (рис. 64).

4. Учитывая, что в области реальных значений критерия $\lambda_э = 1{,}0—10^3$Н/м его влияние на $s_{к1}$ несущественно, единственно возможным путем осуществления деформации хрупких материалов следует признать гидроэкструзию с противодавлением, приложенным вдоль оси выпрессованного изделия.

5. С увеличением $\lambda_э$ зазоры $\Delta_н$ и $\Delta_в$ возрастают (рис. 65). Этот факт может быть использован для обеспечения режима гидродинамического трения и соответствующего уменьшения износа рабочего инструмента при гидроэкструзии заготовок с повышенной шероховатостью поверхности. В соответствии с данными расчетов представляется вполне возможным ведение в режиме гидродинамического трения гидроэкструзии заготовок с высотой микронеровностей до 10 мкм.

6. С уменьшением напряжения текучести деформируемого материала σ_s зазоры $\Delta_н$, $\Delta_в$ возрастают, что физически можно объяснить повышением «податливости» одной из двух сред, находящихся в состоянии течения.

АММ процесса безоправочной гидроэкструзии. Способ безоправочной гидроэкструзии (гидроэкструзия с использованием гидравлической оправки) в основном применяется для производства толстостенных и особотолстостенных труб. Физически суть метода состоит в том, что при гидроэкструзии давление рабочей жидкости в полости заготовки, как правило, превышает предел текучести деформируемого материала. Поэтому рабочая жидкость, находящаяся в полости заготовки, исполняет роль деформирующего инструмента, что обеспечивает высокое качество внутреннего канала труб (отсутствие складок, трещин). Особенно эффективна гидроэкструзия на гидравлической оправке при производстве особотолстостенных труб, когда другими методами ОМД (волочение, прокатка на станах ХПТ) невозможно добиться равномерной прора-

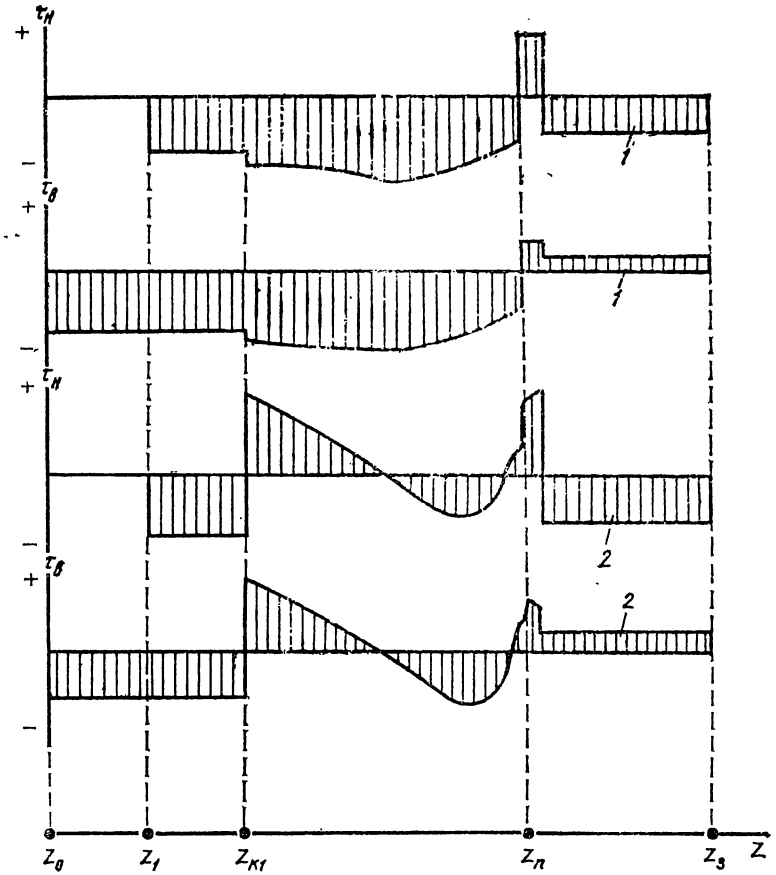

Рис. 64. Возможные эпюры изменения напряжений $\tau_н$ и $\tau_в$ вдоль оси прессования:
1 — $\lambda_э = 10$ Н/м; *2* — $\lambda_э = 10^3$ Н/м

ботки структуры заготовки по ее сечению и получить правильную геометрию канала. Безоправочным способом можно получать трубы с отверстиями правильной геометрической формы практически любых размеров.

В наиболее простом варианте при безоправочной гидроэкструзии производят герметизацию (обкатку) одного из концов заготовки, после чего, установив заготовку глухим заходным концом в матрицу, осуществляют ее деформацию.

Применительно к решению задачи об определении энергосиловых и деформационных параметров безоправочного реду-

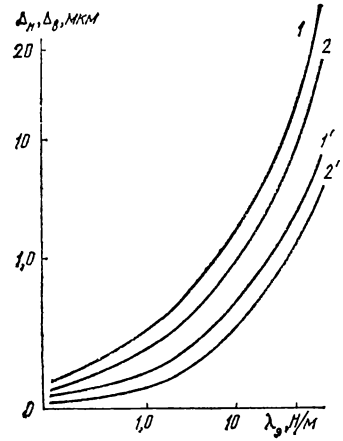

Рис. 65. Зависимость величины зазоров между инструментом и заготовкой на выходе из очага деформации от $\lambda_э$ при гидроэкструзии на неподвижной оправке трубы 14×2 мм (заготовка 28×4 мм из стали ШХ-15) при $\theta = 1000$ °С (*1*, *2*) и $\theta = 20$ °С (*1'*, *2'*):
1 — $\Delta_н$; *2* — $\Delta_в$

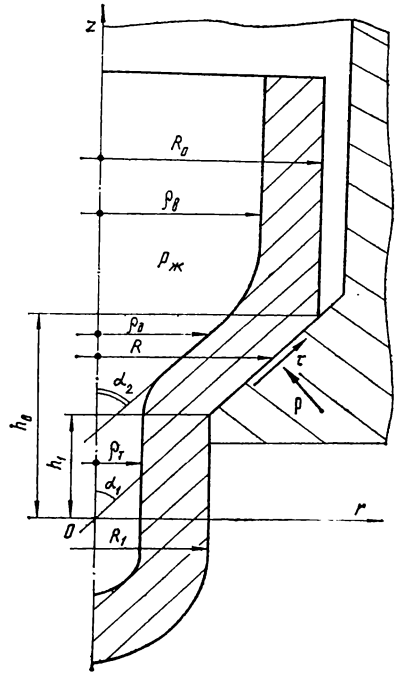

Рис. 66. Схема редуцирования труб гидроэкструзией

цирования сформулированные в гл. 3 положения позволяют предложить следующую математическую модель процесса. В качестве исходной используем следующую функцию осевых скоростей течения (рис. 66):

$$v_z = \frac{v_0 (R_0^2 - \rho_в^2)}{R^2 - \rho_д^2}. \qquad (5.60)$$

Из (5.60) определяем скорость осевой деформации

$$\dot{e}_z = -\frac{2v_z}{R^2 - \rho_д^2}\left(R\frac{\partial R}{\partial z} - \rho_д \frac{\partial \rho_д}{\partial z}\right), \qquad (5.61)$$

где z — текущая координата вдоль оси Z, совпадающей с осью прессования.

Из условия неразрывности деформаций в условиях осесимметричного течения определяем радиальную составляющую скорости металла

$$v_r = \frac{1}{r}\left(C_z - \frac{\dot{e}_z r^2}{2}\right), \qquad (5.62)$$

где r — текущая координата вдоль оси $\bar{r}$, перпендикулярной к оси прессования; C_z — функция координаты z, удовлетворяющая граничным условиям.

На контакте с матрицей ($r = R$) должно соблюдаться соотношение, отвечающее условию скольжения металла по поверхности инструмента

$$\left.\frac{v_r}{v_z}\right|_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{5.63}$$

причем $R = R^*(z)$ — гранично заданная функция, характеризующая контур матрицы в меридиальном сечении.

Аналогично на внутренней поверхности

$$\left.\frac{v_r}{v_z}\right|_{r=\rho_д} = \frac{\partial \rho_д}{\partial z}. \tag{5.64}$$

Поиск функции $\rho_д = \rho_д(z)$ — одна из целей разработки модели. Кроме кинематического граничного условия (5.63) решение должно удовлетворять граничным условиям по напряжениям

$$p|_{r=\rho_д} = p_ж; \tag{5.65}$$

$$\tau|_{r=\rho_д} = 0. \tag{5.66}$$

Связь с параметрами внешнего контактного трения осуществим посредством соотношения

$$\left.\frac{\tau}{p}\right|_{r=R} = f^*. \tag{5.67}$$

Из условия статического равновесия элементарного объема в периферийных участках очага деформации ($r \to R$ и $r \to \rho_д$) определяем связь составляющих тензора напряжений с величинами τ и p:

$$\tau = (\sigma_r - \sigma_z)\sin\alpha_к\cos\alpha_к + \tau_{rz}(\cos^2\alpha_к - \sin^2\alpha_к); \tag{5.68}$$

$$p = \sigma_r\cos^2\alpha_к + \sigma_z\sin^2\alpha_к - 2\tau_{rz}\sin\alpha_к\cos\alpha_к, \tag{5.69}$$

где $\alpha_к$ ($к = \overline{1, 2}$) — угол наклона образующей наружного $\left(\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\partial R}{\partial z}\right)$ или внутреннего $\left(\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\partial \rho_д}{\partial z}\right)$ контуров заготовки в очаге деформации к оси прессования.

Осевое напряжение σ_z определяем по одному из дифференциальных уравнений движения для осесимметричного формоизменения

$$\sigma_z = -\int_{h_1}^{z}\left(\frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}\right)dz + \sigma_p + \sigma_{вн}, \tag{5.70}$$

где σ_p — напряжение растяжения на выходе из очага деформации от давления рабочей жидкости, $\sigma_p = \frac{p_{ж}\rho_т^2}{R_т^2 - \rho_т^2}$; h_1 — ордината сечения выхода заготовки из очага деформации.

Условие выполнения второго дифференциального уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{2T}{H}(e_r - e_z) + \sigma_z\right] + \frac{2T}{H}(e_r - e_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T}{H}\gamma_{rz}\right) = 0 \quad (5.71)$$

является одним из критериев поиска действительных полей скоростей и напряжений в рассматриваемой математической модели.

Давление рабочей жидкости в контейнере пресса определим из условия силового статического равновесия заготовки в целом

$$p_{ж} = \frac{-1}{R_0^2}\left[2\int_{h_1}^{h_0}(p\sin\alpha_1 + \tau\cos\alpha_1)R^*(z)\,dz + \sigma_{вн}(R_т^2 - \rho_т^2)\right], \quad (5.72)$$

где h_0 — ордината сечения входа заготовки в очаг деформации.

Решение ищем из условия соблюдения граничных условий (5.63), (5.65) — (5.67) и уравнения движения (5.71) в диаметральных сечениях очага деформации, имеющих различные значения координаты z. При этом величину C_z представляем посредством аппроксимирующей функции вида

$$C_z = v_0 R_0 \sum_{j=1}^{5\bar{N}}\left[\left(\frac{z}{R_0}\right)^{gj} a_j\right], \quad (5.73)$$

где g — произвольный постоянный коэффициент.

Таким образом, решение задачи сводится к определению постоянных коэффициентов a_j и величин σ_z, $p_{ж}$ из системы $5\bar{N}$ уравнений, каждое из которых является одним из уравнений ((5.63), (5.65) — (5.67), (5.71) с конкретной координатой z, решаемых совместно с интегральными уравнениями (5.70) и (5.72). При $N \leqslant 4$ решение задачи на ЭВМ не представляет принципиальных затруднений.

На рис. 67, 68 приведены результаты реализации математической модели для редуцирования труб из стали 20. Из сравнения расчетных и экспериментальных данных видно, что модель с большой степенью точности отражает характер влияния параметров процесса на показатель изменения тол-

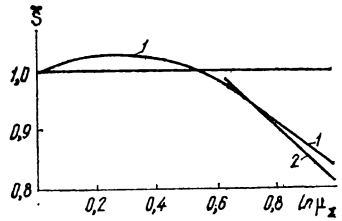

Рис. 67. Расчетная (*1*) и эмпирическая (2) зависимости относительного изменения толщины средней стенки от суммарной вытяжки

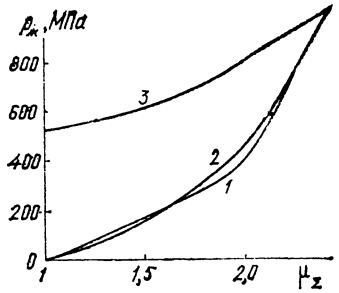

Рис. 68 Зависимость давления в контейнере от суммарной вытяжки:

1 — эмпирические данные; *2* — расчет; *3* — предельное давление для трубы

щины стенки $\bar{S} = S_1 S_0^{-1}$ (здесь S_0, S_1 — соответственно толщина стенки заготовки и трубы) и величину давления на контейнере $p_ж$.

Анализ данных, полученных при реализации приведенной математической модели, позволил выбрать следующие параметры процесса для производства труб размерами 7,0—8,0 × × 2,0—2,2 мм: угол конусности матрицы $2\alpha_1 = 30°$; переднее механическое натяжение 7000 Н [109]. При выборе параметров гидроэкструзии учитывалась возможность разрыва трубы под действием внутреннего давления после выхода из матрицы. Для расчета предельно допустимых давлений, которые выпрессованная труба способна выдержать без разрушения, использовали следующую методику.

Рассмотрим толстостенную трубу с внешним $R_т$ и внутренним $\rho_т$ радиусами, находящуюся в состоянии нагружения внутренним давлением $p_ж$. Осевая растягивающая сила, действующая на трубу вследствие воздействия давления $p_ж$ на ее дно, $P_р = \pi\rho_т^2 p_ж$. Для рассматриваемого случая осесимметричной деформации формулы О. Л. Коши для выражения деформаций через перемещения [110] запишем в виде

$$e_z = \text{const}; \qquad e_\theta = \frac{U}{r}; \quad e_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \tag{5.74}$$

где U — радиальное перемещение под действием $p_ж$.

Постоянство e_z вытекает из постоянства $p_ж$ и $P_р$ по длине трубы. Из условия несжимаемости

$$U = \frac{C}{r} - \frac{e_z r}{2}. \tag{5.75}$$

Неизвестные C и e_z, входящие в (5.75), определим исходя из условия необходимости выполнения дифференциального уравнения равновесия в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{2T}{\Gamma}(e_\theta - e_r)\frac{1}{r} \tag{5.76}$$

и граничных условий

$$\sigma_r|_{r=R_т} = 0; \tag{5.77а}$$

$$\sigma_r|_{r=\rho_т} = -p_ж. \tag{5.77б}$$

Подставив в (5.76) значения деформаций, получим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{4TC}{\Gamma r^3}. \tag{5.78}$$

Используем гипотезу линейной вязкости материала

$$\frac{T}{\Gamma} = \mu = \text{const}. \tag{5.79}$$

После подстановки (5.79) в (5.78) и интегрирования получаем значение радиального напряжения

$$\sigma_r = C_1 - \frac{2\mu C}{r^2}, \tag{5.80}$$

где $C_1 = \text{const}$, так как σ_r не зависит от координаты z.

Подставив (5.77а) в (5.80), определим значение одной из искомых постоянных интегрирования

$$C_1 = \frac{2\mu C}{R_т^2}. \tag{5.81}$$

С учетом (5.81) выражение (5.80) примет вид

$$\sigma_r = 2\mu C(R_т^{-2} - r^{-2}). \tag{5.82}$$

Подставив (5.77б) в (5.82), определим вторую постоянную интегрирования

$$C = \frac{p_ж}{2\mu}(\rho_т^{-2} - R_т^{-2})^{-1} \tag{5.83}$$

и получим

$$\sigma_r = -\frac{\left(\frac{R_т^2}{r^2} - 1\right)p_ж}{\frac{R_т^2}{\rho_т^2} - 1}. \tag{5.84}$$

Осевое напряжение найдем из уравнения

$$\sigma_z = 2\mu(e_z - e_r) + \sigma_r. \tag{5.85}$$

Учитывая, что $e_r = -\left(\frac{e_z}{2} + \frac{C}{r^2}\right)$, из (5.85) получаем

$$\sigma_z = 3\mu e_z + \left(\frac{R_т^2}{\rho_т^2} - 1\right)^{-1} p_ж. \qquad (5.86)$$

Подставим (5.86) в граничное условие

$$\pi\rho_т^2 p_ж = 2\pi \int_{\rho_т}^{R_т} r\sigma_z dr \qquad (5.87)$$

и, решив полученное выражение относительно e_z, получим значение e_z, отвечающее выполнению граничного условия (5.87) в виде равенства

$$e_z = 0. \qquad (5.88)$$

Интенсивность сдвиговых деформаций $\Gamma = 2\sqrt{0{,}75e_z^2 + C^2 r^{-4}}$ с учетом соотношений (5.83), (5.88) запишем в виде

$$\Gamma = \frac{R_т^2 p_ж}{\mu r^2 \left(\frac{R_т^2}{\rho_т^2} - 1\right)}. \qquad (5.89)$$

Интенсивность касательных напряжений, соответствующую принятому закону (5.79), определим выражением

$$T = \frac{R_т^2 p_ж}{r^2 \left(\frac{R_т^2}{\rho_т^2} - 1\right)}. \qquad (5.90)$$

Если принять, что разрушение трубы наступит в тот момент, когда интенсивность касательных напряжений на внешнем контуре $r = R_т$ достигнет некоторой критической величины T^{**}, из (5.90) получим значение предельного внутреннего давления, которое может выдержать труба:

$$p_ж^{кр} = T^{**}\left(\frac{R_т^2}{\rho_т^2} - 1\right). \qquad (5.91)$$

Учитывая, что характер деформации на внешнем контуре близок к условиям одноосного растяжения, примем $T^{**} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_в$ (здесь $\sigma_в$ — временное сопротивление материала готового изделия при стандартном испытании на разрыв) и получим окончательно выражение для предельно допустимого

(критического) давления рабочей жидкости при редуцировании гидроэкструзией

$$p_{ж}^{кр} = \frac{\sigma_в}{\sqrt{3}}\left(\frac{R_т^2}{\rho_т^2} - 1\right). \qquad (5.92)$$

На рис. 64 приведены расчетные значения предельно допустимых давлений. Эмпирические и расчетные значения $p_{ж}^{кр}$ в выполненных нами комплексных исследованиях расходились не более чем на 5—7 %, что позволяет констатировать высокий уровень достоверности предложенного условия (5.92).

3. Инерционные эффекты при гидроэкструзии

Влияние скорости прессования на динамические характеристики процесса. Влияние скорости формоизменения на параметры внешнего воздействия в теории обработки металлов давлением обычно учитывают посредством эмпирических коэффициентов, связывающих реологические свойства деформируемого тела со скоростной интенсивностью формоизменения. Ниже сделана попытка оценить влияние инерционных усилий, возникающих в очаге деформации вследствие изменения скорости движения деформируемой среды, на силовые параметры процесса. В общем виде решение может быть получено из уравнений (2.12б), включающих инерционные составляющие.

Рассмотрим вариант решения при допущении о справедливости гипотезы «плоских диаметральных сечений». Элементарная энергия, необходимая на изменение скорости некоторой бесконечно малой массы материала dm в очаге деформации, равна импульсу приложенной к данной массе силы

$$dPdt = dvdm. \qquad (5.93)$$

Заменяя в (5.93) дифференциалы скорости, времени и массы их значениями при использовании допущения о преимущественном осевом течении деформируемого материала ($v \approx v_z$):

$$dv = v_0 d\mu_e; \qquad (5.94а)$$

$$dt = \frac{dz}{v_0 \mu_e}; \qquad (5.94б)$$

$$dm = \frac{\rho F_0}{\mu_e} dz, \qquad (5.94в)$$

где F_0— площадь поперечного сечения заготовки на входе в очаг деформации, получим после соответствующих преобразований

$$dP = v_0^2 \rho F_0 d\mu_e. \qquad (5.95)$$

Полное инерционное усилие, действующее на всю массу материала в очаге деформации, определится из (5.95)

$$P_\Sigma = v_0^2 \rho F_0 (\mu_\Sigma - 1). \qquad (5.96)$$

Выражения (5.95), (5.96) могут быть использованы при анализе влияния кинематики формоизменения на силовые параметры конкретного процесса ОМД. Рассмотрим решение задачи для гидропрессования прутков. Исключительно для упрощения анализа вводим три допущения: материал идеально пластичен и не обладает склонностью к упрочнению ($\sigma_s = \sigma_т = \text{const}$); матрица выполнена конической ($\alpha_м = \text{const}$); параметры процесса обеспечивают в очаге деформации режим граничного трения по закону Амонтона — Кулона.

Дифференциальное уравнение равновесия элементарного объема, выделенного в очаге деформации двумя бесконечно близкими диаметральными плоскостями, после исключения бесконечно малых величин высшего порядка принимает вид

$$\sum Z = R^2 d\sigma_z + 2\sigma_z R \operatorname{tg}\alpha_м dz - 2R\tau\, dz - \\ - 2pR \operatorname{tg}\alpha_м dz - v_0^2 R_0^2 \rho d\mu_e = 0. \qquad (5.97)$$

Принимая условие пластичности в виде $p - \sigma_z = \sigma_т$, после приведения подобных и преобразований получаем

$$\frac{dp}{dz} - \frac{2fp}{z \operatorname{tg}\alpha_м} = v_0^2 \rho \frac{R_0^2}{R} \frac{d\mu_e}{dz} + \frac{2\sigma_т}{z}. \qquad (5.98)$$

Учитывая, что для конической матрицы справедливо соотношение

$$\frac{d\mu_e}{dz} = -\frac{2R_0^2}{z^3 \operatorname{tg}^2 \alpha_м}, \qquad (5.99)$$

окончательно преобразуем (5.98) к виду

$$\frac{dp}{dz} - \frac{2fp}{z \operatorname{tg}\alpha_м} = -\frac{2v_0^2 \rho R_0^4}{3z^5 \operatorname{tg}^4 \alpha_м} + \frac{2\sigma_т}{z}. \qquad (5.100)$$

Решая дифференциальное уравнение (5.100) относительно контактного давления, получаем

$$p = \frac{2\sigma_т}{a}\left(1 - \frac{z^a}{z_1^a}\right) + \frac{2v_0^2 \rho R_0^4 z^a}{(4+a) \operatorname{tg}\alpha_м}\left(\frac{1}{z^{a+4}} - \frac{1}{z_1^{a+4}}\right) + \\ + (\sigma_{вн} + \sigma_т)\frac{z^a}{z_1^a}, \qquad (5.101)$$

где z_1 — координата сечения, соответствующего окончанию деформации, $z_1 = \frac{R_1}{\operatorname{tg}\alpha_м}$; $a = 2f \operatorname{ctg}\alpha_м$.

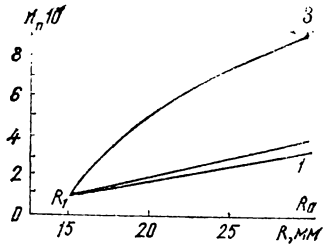

Рис. 69. Зависимость коэффициента подпора от положения плоскости диаметрального сечения, характеризуемого радиусом матрицы при следующих скоростях прессования v_1:
1 — 1 м/с; *2* — 100 м/с; *3* — 400 м/с

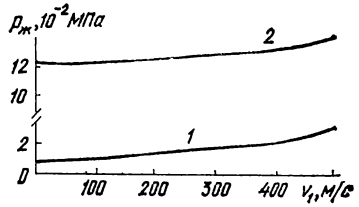

Рис. 70. Зависимость давления в контейнере от скорости прессования:
1 — свинцовые образцы; *2* — стальные образцы

Давление рабочей жидкости в контейнере пресса, отвечающее условию силового равновесия заготовки и, следовательно, соответствующее установившемуся процессу прессования, определится уравнением

$$p_ж = \frac{b}{R_0^2}\left\{\left[\sigma_{вн} + \sigma_т\left(1 + \frac{a}{2}\right) - \frac{2v_0^2\rho R_0^4}{(a+4)\,z_1^4\,\mathrm{tg}^4\,\alpha_м}\right]\frac{z_0^{a+2} - z_1^{a+2}}{(a+2)\,z_1^a} - \right.$$
$$\left. - \sigma_т\frac{z_0^2 - z_1^2}{a} + \frac{v_0^2\rho R_0^4}{(4+a)\,\mathrm{tg}^4\,\alpha_м}\left(\frac{1}{z_1^2} - \frac{1}{z_0^2}\right)\right\} + \frac{\sigma_{вн}R_1^2}{R_0^2}, \quad (5.102)$$

где $b = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha_м(\mathrm{tg}\,\alpha_м + f)$; z_0 — координата, соответствующая началу деформации, $z_0 = \dfrac{R_0}{\mathrm{tg}\,\alpha_м}$.

На рис. 69 приведены графики распределения коэффициента подпора $n_п = p\sigma_т^{-1}$ по длине очага деформации при прессовании свинцовых ($\sigma_т = 40$ МПа) заготовок с различными скоростями.

На рис. 70 показана зависимость давления рабочей жидкости от скорости прессования на выходе из очага деформации. Параметры расчета для обоих кривых: $R_1 = 15$ мм; $\mu_Σ = 4$; $f = 0{,}1$.

Изложенная методика определения инерционных составляющих динамических параметров процесса деформации защищена авторским свидетельством [111].

Определение скорости «выстрела». Существенной проблемой, стоящей перед технологами и конструкторами при реализации процессов гидроэкструзии, является проблема «выстрела» в конечной стадии прессования.

Явление «выстрела» обусловлено тем, что накопленная в результате сжатия рабочей жидкости потенциальная энергия в момент окончания прессования переходит в кинетическую энергию движения изделия и выброса жидкости из контейнера. Скорость заготовки в конечной стадии может достигать 300—500 м/с, что совершенно недопустимо по целому ряду соображений (ухудшение качества изделий, безопасность эксплуатации оборудования).

Исходя из принципа Деламбера кинетостатики, для равновесной системы рабочая жидкость — заготовка справедливо уравнение

$$(\vec{p_ж F_0}) + \vec{P}_и + \vec{R}_р = 0, \qquad (5.103)$$

где $\vec{P}_и$ — полное инерционное усилие от изменения скорости движения изделия; $\vec{R}_р$ — реактивное усилие от контактных напряжений в очаге деформации.

Величина усилия $\vec{P}_и$ в соответствии со вторым законом Ньютона определится из соотношения

$$\vec{P}_и = -\bar{m}_Σ \frac{d\vec{v}_1}{dt}, \qquad (5.104)$$

где $\bar{m}_Σ$ — масса всей деформируемой заготовки.

В установившейся стадии прессования скорость выхода изделия из очка матрицы $\vec{v}_1$ практически постоянна, и условие (5.103) принимает вид

$$(\vec{p_ж F_0}) + \vec{R}_р = 0. \qquad (5.105)$$

Уравнение (5.105) часто используют для определения величины $p_ж$ в установившемся процессе прессования [112, 113]. При этом совместно решают уравнения статического равновесия заготовки в целом и дифференциальное уравнение статического равновесия некоторого выделенного в очаге деформации объема металла. Это условие было использовано при выводе формул (5.56), (5.72). Для процесса гидроэкструзии характерна близкая к линейной зависимость $p_ж = p_ж(\mu_Σ)$. На практике величину давления $p_ж$ часто определяют по эмпирической формуле Пью—Лоу [114], дающей весьма близкую сходимость с экспериментальными данными:

$$p_ж = A \ln \mu_Σ, \qquad (5.106)$$

где $A = 5{,}81\ (HV + 10{,}81) \cdot 10^6$, Па.

В процессе освобождения очага деформации текущая вытяжка μ_t является функцией времени, или (что то же самое)

положения заднего торца заготовки в очаге деформации. Исходя из этого, величина $\vec{R}_p$ для этой стадии может быть определена из выражения

$$\vec{R}_{\text{р}} = -AF_t \ln \mu_t, \tag{5.107}$$

где F_t— текущее значение площади торца заготовки.

Давление $p_{\text{ж}}$ при этом остается практически на уровне установившегося процесса (5.106) и скачкообразно падает до нуля лишь в момент выхода заднего торца заготовки из очка матрицы (в момент выстрела). Вследствие этого в ходе освобождения очага деформации между величинами $(\vec{p_{\text{ж}}F_t})$ и $\vec{R}_{\text{р}}$ появляется дисбаланс, который компенсируется инерционным усилием вследствие возрастания скорости заготовки по отношению к величине скорости прессования в установившемся процессе.

Представим текущее время освобождения очага деформации как функцию координаты плоскости заднего торца заготовки

$$dt = \frac{\mu_t}{v_1} dz_{\text{к}t}, \tag{5.108}$$

где $z_{\text{к}t}$— текущее значение координаты заднего торца заготовки вдоль оси прессования Z (за нуль принимается положение заднего торца в момент начала освобождения очага деформации).

Подставляя в (5.103) значения входящих в него величин, получаем дифференциальное уравнение движения заготовки в конечной стадии процесса прессования

$$\frac{\bar{m}_\Sigma v_1}{\mu_t} \frac{dv_1}{dz_{\text{к}t}} + AF_t \ln \frac{\mu_t}{\mu_\Sigma} = 0. \tag{5.109}$$

Решая (5.109) относительно v_1, получаем

$$\frac{v_1^2}{2} = \int_0^{z_{\text{к}t}} \frac{F_t}{\bar{m}_\Sigma} \mu_t A \ln \frac{\mu_\Sigma}{\mu_t} dz_{\text{к}t} + C. \tag{5.110}$$

Постоянная интегрирования C определится из граничного условия $z_{\text{к}t} = 0$; $v_1 = v_0\mu_\Sigma$, которое после подстановки в (5.110) дает

$$C = \frac{1}{2} v_0^2 \mu_\Sigma^2.$$

Величины μ_t и F_t являются функциями координаты $Z_{\text{к}t}$, причем вид самих функций обусловлен конкретными геомет-

рическими характеристиками процесса. Вследствие этого интегрирование в квадратурах для выражения (5.110) зачастую невозможно. Для приближенного решения заменим указанные величины их средними значениями

$$\bar{\mu}_t = \frac{1}{z_{кt}} \int_0^{z_{кt}} \mu_t dz_{кt}; \quad \bar{F}_t = \frac{1}{z_{кt}} \int_0^{z_{кt}} F_t dz_{кt}. \qquad (5.111)$$

Подставляя (5.111) в (5.110), получаем следующую функцию изменения скорости по мере освобождения очага деформации:

$$v_1 = \sqrt{2z_{кt}\bar{\mu}_t\bar{F}_t \frac{A}{m_\Sigma} \ln \frac{\mu_\Sigma}{\mu_t} + v_0^2\mu_\Sigma^2}. \qquad (5.112)$$

Для момента выстрела из выражения (5.112) получаем

$$v_1^{**} = \sqrt{2l_д\bar{\mu}_t\bar{F}_t \frac{A}{m_\Sigma} \ln \frac{\mu_\Sigma}{\mu_t} + v_0^2\mu_\Sigma^2}. \qquad (5.113)$$

Для случая прессования труб на оправке выражение (5.113) можно преобразовать к виду

$$v_1^{**} = \sqrt{\frac{11{,}62\,(R_0^2 - R_{оп}^2)\,(1{,}33R_0^2 - 0{,}33R_{оп}^2 - \Delta RR_0)\,(HV + 10{,}81)\Delta R + v_0^2\mu_\Sigma^2}{(2R_0^2 - R_{оп}^2)\bar{m}_\Sigma \operatorname{tg}\alpha_м}}, \qquad (5.114)$$

где ΔR — общее обжатие по радиусу заготовки в процессе деформации, мм; масса $\bar{m}_\Sigma$ и скорость v_0 имеют размерность соответственно кг и м/с.

Анализ выражений (5.113), (5.114) позволяет сделать следующие практические выводы. Во-первых, скорость прессования в установившейся стадии процесса практически не влияет на скорость выстрела (при реально существующих на практике скоростях v_0). Во-вторых, скорость выстрела может быть существенно снижена, если выходящее из очка матрицы изделие связано с некоторой массой, играющей роль инерционного тормоза. В-третьих, увеличение угла конусности матрицы $\alpha_м$ уменьшает скорость выстрела (этот вывод относится к малым углам конусности $\alpha_м < 45°$, для которых справедливо исходно используемое уравнение Пью—Лоу).

Глава шестая

ПРОДОЛЬНАЯ ОПРАВОЧНАЯ ПРОКАТКА ТРУБ

1. Одноклетевая прокатка

Процесс продольной оправочной прокатки труб характеризуется неравномерным распределением контактных напряжений по длине и ширине очага деформации. В работах [115, 116] получены формулы, позволяющие определить контактные напряжения с учетом неравномерности их распределения в зоне формоизменения. При этом принято условие постоянства напряжения текучести обрабатываемого материала в процессе деформации ($\sigma_s = \beta^* \sigma_т$). Это снижает достоверность полученных уравнений, так как скорость деформации и завиеящее от нее напряжение текучести материала реально переменны как по длине, так и по ширине зоны формоизменения.

В данном исследовании сделана попытка аналитически учесть влияние неравномерного распределения пластических свойств материала заготовки по очагу деформации на контактное взаимодействие в зоне обжатия заготовки валком. Рассмотрим элементарный объем металла, выделенный в очаге деформации двумя бесконечно близкими диаметральными и меридиональными плоскостями (рис. 71). Условие равновесия выделенного элемента (ось $\bar{X}$ совпадает с осью прокатки) определится системой

$$\sum \bar{X} = \sigma_x dF_2 + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\, dF_2 - \sigma_x dF_1 - p_x \sin \alpha_x\, dF_3 \mp$$
$$\mp \tau_x \cos \alpha_x\, dF_3 \mp \tau_{0x} \cos \gamma\, dF_4 - p_0 \sin \gamma\, dF_4 = 0; \quad (6.1а)$$

$$\sum \bar{y} = p_0 \cos \gamma\, dF_4 - p_x \cos \alpha_x\, dF_3 \pm \tau_x \sin \alpha_x dF_3 \mp$$
$$\mp \tau_{0x} \sin \gamma\, dF_4 \pm \sigma_\Theta\, dF_5 \sin \frac{d\Theta}{2} + \left(\sigma_\Theta + \frac{\partial \sigma_\Theta}{\partial \Theta} d\Theta\right) \sin \frac{d\Theta}{2} dF_6 = 0, \quad (6.1б)$$

где p_x, p_0 — нормальные напряжения на контакте металла с валком и оправкой соответственно; τ_x, τ_{0x} — напряжения контактного трения на валке и оправке соответственно (верхний знак соответствует зонам опережения); α_x, γ — соответственно текущее значение угла контакта в плоскости, проходящей через ось прокатки, и угол конусности оправки (γ положи-

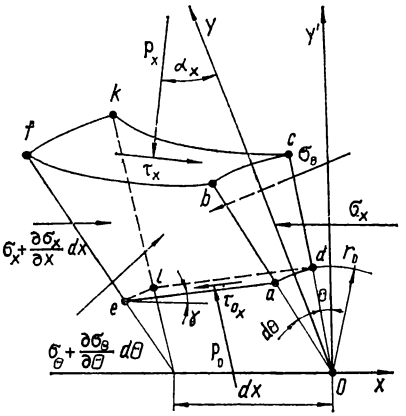

Рис. 71. Элементарный объем металла, выделенный в очаге деформации (направление напряжений τ показано для зоны отставания на валке и зоны опережения на оправке; xOy' — плоскость, проходящая через ось прокатки и вершину калибра):
abcd — dF_1; *efkl* — dF_2; *bckf* — dF_3; *aeld* — dF_4; *cdlk* — dF_5; *abef* — dF_6

тельно при возрастании диаметра оправки в направлении прокатки).

Напряжения контактного трения выразим в соответствии с законом Амонтона — Кулона

$$\tau_x = fp_x; \qquad (6.2а)$$

$$\tau_{0x} = f_0 p_0, \qquad (6.2б)$$

где f, f_0 — соответственно коэффициенты внешнего трения для поверхностей валка и оправки.

Подставляя (6.2) в (6.1) и решая систему (6.1) относительно p_0, после преобразований получаем

$$\left[\sigma_x(dF_2 - dF_1) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \times \right.$$

$$\times\, dx\, dF_2 - p_x(\sin\alpha_x \pm$$

$$\left. \pm f\cos\alpha_x)\, dF_3\right](\operatorname{ctg}\gamma \mp$$

$$\mp f_0) - \left\{p_x\,(\cos\alpha_x \mp f\sin\alpha_x)\;dF_3 - \left[\sigma_\theta\,(dF_5 + dF_6) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial\sigma_\theta}{d\theta}\,d\theta\,dF_6\right]\frac{d\theta}{2}\right\}(1 \pm f_0\operatorname{ctg}\gamma) = 0. \qquad (6.3)$$

Принимаем условие пластичности в виде

$$p_x - \sigma_x = \zeta_1\sigma_s(x,\ \theta), \qquad (6.4)$$

где ζ_1 — коэффициент, учитывающий влияние неравномерности деформации на напряженное состояние в данной точке.

В соответствии с (6.4) запишем

$$\sigma_x = p_x - \zeta_1\sigma_s; \qquad (6.5а)$$

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{\partial(\zeta_1\sigma_s)}{\partial x}. \qquad (6.5б)$$

Подставляя (6.5) в (6.3), после преобразований получаем

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}\,dx\,dF_2(\operatorname{ctg}\gamma \mp f_0) + \{(dF_2 - dF_1)(\operatorname{ctg}\gamma \mp f_0) -$$

$$- [(\sin\alpha_x + f\cos\alpha_x)(\operatorname{ctg}\gamma \mp f_0) - (\cos\alpha_x \mp f\sin\alpha_x) \times$$

$$\times (1 \pm f_0\operatorname{ctg}\gamma)]\,dF_3\}\,p_x - \left[\zeta_1\sigma_s(dF_2 - dF_1) + \frac{\partial(\zeta_1\sigma_s)}{\partial x}\,dx\,dF_2\right] \times$$

$$\times (\operatorname{ctg}\gamma \mp f_0) + \left[\sigma_\Theta (dF_5 + dF_0) + \frac{\partial \sigma_\Theta}{\partial \Theta} d\Theta\, dF_6\right] \times$$
$$\times (1 \pm f_0 \operatorname{ctg}\gamma) \frac{d\Theta}{2} = 0. \qquad (6.6)$$

Определяя значения площадей dF_1, dF_2, dF_3, dF_4, dF_5, dF_6, подставляя полученные величины в (6.6), отбрасывая бесконечно малые высших порядков и преобразовывая, имеем

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}\left(r_0 + \frac{\delta}{2}\right)\delta\, dx\, d\Theta + \left\{\left[\frac{\partial \delta}{\partial x} r_0 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{\operatorname{tg}\gamma}{2}\right)\delta\right] dx\, d\Theta - \right.$$
$$- \left[(\sin\alpha_x \pm f\cos\alpha_x) + (\cos\alpha_x \pm f\sin\alpha_x)\frac{\operatorname{tg}\gamma \pm f_0}{1 \mp f_0 \operatorname{tg}\gamma}\right] \times$$
$$\times r_0\, dx\, d\Theta\Big\} p_x - \left\{\zeta_1\sigma_s\left[\frac{\partial \delta}{\partial x} r_0 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{\operatorname{tg}\gamma}{2}\right)\delta\right] dx\, d\Theta + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial (\zeta_1\sigma_s)}{\partial x}\left(r_0 + \frac{\delta}{2}\right) dx\, d\Theta\right\} + \sigma_\Theta \delta \frac{\operatorname{tg}\gamma \pm f_0}{1 \mp f_0 \operatorname{tg}\gamma}\, dx\, d\Theta = 0, \qquad (6.7)$$

где $\delta(x, \Theta)$ — текущее по очагу деформации значение толщины стенки.

В соответствии с принятым условием пластичности

$$\sigma_\Theta = p_x - \frac{\zeta_1\sigma_s}{2}. \qquad (6.8)$$

Подставляя (6.8) в (6.7), сокращая на $dx d\Theta$ и проводя преобразования в соответствии с условием

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha_x + \gamma,$$

получаем в окончательном виде дифференциальное уравнение связывающее величину нормальных контактных напряжений с параметрами прокатки

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \left\{\left[r_0(\operatorname{tg}\alpha_x + \operatorname{tg}\gamma) + \delta\left(\operatorname{tg}\alpha_x + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{2}\right)\right] - \right.$$
$$- \left[(\sin\alpha_x \pm f\cos\alpha_x) + (\cos\alpha_x \pm f\sin\alpha_x)\frac{\operatorname{tg}\gamma \pm f_0}{1 \mp f_0 \operatorname{tg}\gamma}\right] \times$$
$$\left. \times (r_0 + \delta) + \frac{\delta(\operatorname{tg}\gamma \pm f_0)}{1 \mp f_0 \operatorname{tg}\gamma}\right\} \frac{p_x}{(r_0 + 0{,}5\delta)\delta} =$$
$$= \left\{\zeta_1\sigma_s\left[r_0(\operatorname{tg}\alpha_x + \operatorname{tg}\gamma) + \delta\left(\operatorname{tg}\alpha_x + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{2}\right)\right] + \frac{\partial(\zeta_1\sigma_s)}{\partial x}\left(r_0 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\delta}{2}\right)\delta + \frac{\zeta_1\sigma_s\delta(\operatorname{tg}\gamma \pm f_0)}{2(1 \mp f_0 \operatorname{tg}\gamma)}\right\} \frac{1}{(r_0 + 0{,}5\delta)\delta}. \qquad (6.9)$$

Линейное дифференциальное уравнение (6.9) решается относительно давления p_x в виде

$$p_x = \exp\left(-\int_{x_1}^{x} P\,dx\right)\left[\int_{x_1}^{x} Q \exp\left(\int_{x_1}^{x} P\,dx\right) dx + C\right], \quad (6.10)$$

где P, Q — соответственно сомножитель при p_x и свободный член в выражении (6.9); C — функция распределения нормальных контактных напряжений по ширине калибра на входе в очаг деформации и выходе из него (соответственно $x_1 = x_{вх}$, где $x_{вх}$ — координата точки входа заготовки в очаг деформации и $x_1 = 0$), $C = p(x_1, \Theta)$.

Положение нейтрального сечения ($\tau = 0$) определится функцией $x_н(\Theta)$ после решения уравнения

$$\exp\left(-\int_{x_{вх}}^{x_н} P_{отст}\,dx\right)\left[\int_{x_{вх}}^{x_н} Q_{отст} \exp\left(\int_{x_{вх}}^{x_н} P_{отст}\,dx\right) dx + \right.$$

$$\left. + \zeta_2(\sigma_{s0} + \sigma'_{вх})\right] = \exp\left(-\int_{0}^{x_н} P_{опер}\,dx\right)\left[\int_{0}^{x_н} Q_{опер} \exp\left(\int_{0}^{x_н} P_{опер}\,dx\right) \times\right.$$

$$\left. \times\, dx + \zeta_2(\sigma_{s_1} + \sigma'_{вых})\right], \quad (6.11)$$

где $P_{отст}$, $Q_{отст}$, $P_{опер}$, $Q_{опер}$ — соответствующие функции, определенные для зон отставания и опережения; $\sigma'_{вх}$, $\sigma'_{вых}$ — осевые напряжения от внешнего воздействия соответственно на входе в очаг деформации и выходе из него; $\zeta_2 = 1 - \left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2$ — коэффициент [115].

Определив $x_н(\Theta)$ решением (6.11), окончательно получаем для зоны отставания на валке ($x > x_н$)

$$P_x^{отст} = \exp\left(-\int_{x_{вх}}^{x} P_{отст}\,dx\right)\left[\int_{x_{вх}}^{x} Q_{отст} \exp\left(\int_{x_{вх}}^{x} P_{отст}\,dx\right) \times\right.$$

$$\left. \times\, dx + \zeta_2(\sigma_{s0} + \sigma'_{вх})\right], \quad (6.12)$$

для зоны опережения на валке ($x < x_н$)

$$P_x^{опер} = \exp\left(-\int_{0}^{x} P_{опер}\,dx\right)\left[\int_{0}^{x} Q_{опер} \exp \times\right.$$

$$\left. \times \left(\int_{0}^{x} P_{опер}\,dx\right) dx + \zeta_2(\sigma_{s1} + \sigma'_{вых})\right]. \quad (6.13)$$

Коэффициент ζ_1, отражающий влияние неравномерности деформации на напряженное состояние, запишем в виде

$$\zeta_1 = [e_\delta(x, \Theta) - \bar{\mu}_e(x)]\,[\bar{e}_\delta(x) - \bar{\mu}_e(x)]^{-1}, \qquad (6.14)$$

где e_δ, $\bar{e}_\delta$ — деформация по стенке в данной точке и средняя деформация по стенке в данном диаметральном сечении; $\bar{\mu}_e$ — средняя осевая деформация в данном диаметральном сечении очага.

Величины α_x, $x_{вх}$, H определяются геометрией очага деформации и кинематическими параметрами прокатки.

На рис. 72 приведены расчетные значения величин нормального напряжения p_x и коэффициента подпора $\bar{n}_п = p_x/\sigma_s$ в различных сечениях очага деформации при прокатке на цилиндрической плавающей оправке. Характер изменения расчетных значений исследуемых величин согласуется с экспериментальными данными работы [115].

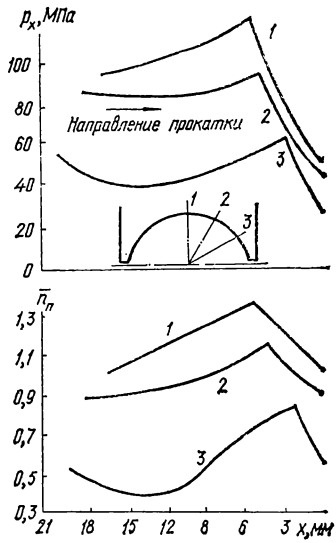

Рис. 72. Зависимость значения p_x и коэффициента подпора $\bar{n}_п$ от координаты x при прокатке труб 58×5 мм из заготовки 63×7 мм (сталь 20) при следующих значениях Θ:
1 — 0; *2* — 30°; *3* — 60°

Практически разработанная методика использована для расчета динамических параметров прокатки на автоматическом стане установки «140» [117].

2. Непрерывная прокатка

В данном исследовании сделана попытка разработать общую математическую модель непрерывной (многоклетевой) продольной оправочной прокатки труб. Для реализации поставленной цели использован вариационно-энергетический метод решения задач теории пластичности. В работе [118] на основании обобщения многочисленных экспериментальных исследований авторы приходят к выводу о том, что несмотря на значительную разницу в радиальных обжатиях между вершиной и выпуском калибра, средний коэффициент вытяжки одинаков для вершины и выпуска. Это позволяет принять в качестве исходной следующую функцию распределения

осевой скорости v_z по очагу деформации

$$v_z = v_0 \bar{\mu}_e. \tag{6.15}$$

Скорость v_0 направлена вдоль оси прокатки $\bar{Z}$. Система координат расположена таким образом, что ось $\bar{Z}$ направлена против хода прокатки. На входе в очаг деформации $z = l_д$, а на выходе $z = 0$.

Анализ геометрических соотношений позволяет получить зависимость [119]

$$\bar{\mu}_e \cong \frac{\left[1 + \frac{\rho_в}{r_{н.о}} + \frac{2}{\pi r_{н.о}}\left(\frac{z^2}{2R_в} - e\right)\right]^2}{\left(1 - \frac{\rho_в}{r_{н.о}}\right)^2}, \tag{6.16}$$

где $\rho_в = r_н - \delta$; $r_{н.о}$ — наружный радиус поверхности заготовки до деформации (для овализованной заготовки — средний наружный радиус); $r_н$ — радиус наружной образующей поверхности заготовки в очаге деформации.

Подставляя (6.16) в (6.15) и дифференцируя полученное выражение по координате z, получаем значение скорости осевой деформации

$$\dot{e}_z = \frac{4z\sqrt{v_z v_0}}{\pi r_{н.о} R_в (1 - \rho_в r_{н.о}^{-1})}. \tag{6.17}$$

Для скорости радиального течения v_r зададим координатную функцию

$$v_r = \frac{z}{R} v_z \left(\frac{r^2}{\rho_в^2} - 1\right)\left(\frac{r_н^2}{\rho_в^2} - 1\right)^1. \tag{6.18}$$

Функция (6.18) удовлетворяет кинематичным граничным условиям

$$v_r\big|_{r=\rho_в} = 0; \tag{6.19а}$$

$$\frac{v_r}{v_z}\bigg|_{r=r_н} = \frac{z}{R}. \tag{6.19б}$$

Граничное условие (6.19б) отвечает наличию движения металла по касательной к поверхности валка (условие скольжения).

Из выражения (6.18) определяем скорость радиальной деформации

$$\dot{e}_r = \frac{2zrv_z}{R\rho_в^2 (r_н^2 \rho_в^{-2} - 1)}. \tag{6.20}$$

Координатная функция скорости тангенциального течения должна отвечать следующим граничным условиям:

$$v_\Theta\big|_{\Theta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta}\right|_{\Theta=0} = 0; \tag{6.21а}$$

$$v_\Theta\Big|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} = 0; \tag{6.21б}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{v_r}{r} + \dot{e}_r + \dot{e}_z = 0. \tag{6.21в}$$

Необходимость соблюдения условий (6.21а,б) обусловлена симметрией анализируемого процесса. Выражение (6.21в) представляет собой условие несжимаемости (2.12а), выполнение которого необходимо по физическому смыслу рассматриваемой задачи.

Зададим функцию тангенциальной скорости течения в виде, удовлетворяющем условиям (6.21а,б):

$$v_\Theta = \Theta^2 A\left[1 - \left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2\right], \tag{6.22}$$

где A — некоторая координатная функция, обеспечивающая выполнение граничного условия (6.21в).

Подставив (6.17), (6.18), (6.20), (6.22) в (6.21в), после ряда преобразований получим выражение для определения искомой функции

$$A = -\exp\left\{\int_0^\Theta \frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 - 0{,}5\right]\left[1 - \left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2\right]^{-1} d\Theta\right\} \times$$

$$\times \int_0^\Theta \exp\left\{\int_0^\Theta \frac{4}{\Theta}\left[0{,}5 - \left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2\right]^{-1} d\Theta\right\} \times$$

$$\times \left[(\dot{e}_r + \dot{e}_z)\, r + v_r\right] d\Theta. \tag{6.23}$$

Значения скоростей сдвиговых деформаций $\dot{\gamma}_{rz}$, $\dot{\gamma}_{\Theta r}$, $\dot{\gamma}_{z\Theta}$ при известных скоростях перемещений v_r, v_Θ, v_z определяются из уравнений (2.10) для цилиндрической системы координат.

Мощность деформации трубы в одной клети при допущении об отсутствии формоизменения вне геометрического очага деформации (зоны обжатия стенки на оправке) определится следующим образом:

$$N_к = 4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{l_д} \int_{\rho_в}^{r_н} \left(\int_0^H T\, dH\right) dr\, dz\, d\Theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{l_д} \tau_н U_н r_н\, dz\, d\Theta -\right.$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{l_д}\tau_в U_в \rho_в\, dz\, d\Theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho_в}^{r_{н0}} T_0 W_0 \frac{r}{\bar{\psi}_0}\, dr\, d\Theta+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho_в}^{r_{н1}} T_1 W_1 \frac{r}{\bar{\psi}_1}\, dr\, d\Theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho_в}^{r_{н0}} \sigma_{вн}^{(0)} v_0 r\, dr\, d\Theta-$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho_в}^{r_{н1}} \sigma_{вн}^{(1)} v_1\, dr\, d\Theta\Big]_к, \qquad (6.24)$$

где $l_д = l_д(\Theta)$; $U_н$, $U_в$ — скорости относительного скольжения на контакте металла с деформирующим инструментом, $U_н = \operatorname{sign}\left[+\sqrt{v_{zн}^2+v_{rн}^2}-v_в\right]\sqrt{\left(\sqrt{v_{zн}^2+v_{rн}^2}-v_в\right)^2+v_{\Theta н}^2}$; $U_в = \sqrt{\left(\sqrt{v_{zв}^2+v_{rв}^2}-v_{оп}\right)^2+v_{\Theta в}^2}$; W — скорость движения точек деформируемого металла в плоскостях среза, $W=\sqrt{v_r^2+v_\Theta^2}$; $\bar{\psi}$ — коэффициент, учитывающий нелинейность поверхности среза (границы очага деформации), $\bar{\psi} = \cos \operatorname{arc\,tg}\frac{\partial l_д}{\partial \Theta}$; к — порядковый номер клети стана; «н», «в», «о», «1» — индексы, указывающие на то, что величины определяются соответственно при $r = r_н$; $r = \rho_в$; $z = l_д$; $z = 0$.

Структура уравнения (6.24) следующая. Первое слагаемое представляет собой мощность формоизменения, второе и третье — мощность напряжений контактного трения соответственно на контакте металла с валком и оправкой, четвертое и пятое — мощность напряжений среза соответственно на входе и выходе из очага деформации, шестое и седьмое — мощность напряжений соответственно заднего и переднего натяжения или подпора.

Для многоклетевого стана суммарная мощность деформации определится из выражения

$$N=\sum_{к=1}^{K} N_к,\ к = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ K-1,\ K, \qquad (6.25)$$

где K — число клетей, участвующих в деформации заготовки в данный момент времени.

Анализ выражений (6.24), (6.25) показал, что, при суммировании по индексу «к» мощности, развиваемые напряжениями внешнего воздействия $\sigma_{вн}^{(0)}$, $\sigma_{в.д}^{(1)}$ в межклетевых проме-

жутках, взаимно сокращаются, мощность среза на выходе из очага деформации равна нулю.

При заданной скорости вращения валков уравнение (6.25) включает две неизвестные величины: скорость осевого движения трубы на входе в первую клеть v_{o0} и осевую скорость правки v_ρ. В соответствии с экстремальными энергетическими принципами значения v_{o0} и v_ρ должны обеспечивать минимизацию функционала N для гранично заданных условий формоизменения. Необходимое и достаточное условие минимизации N имеет вид [55]

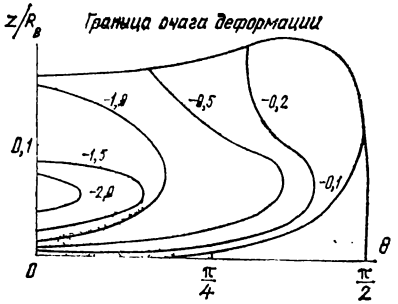

Рис. 73. Линии равных значений параметра $n_\sigma = \sigma_n/2T$ на внешней поверхности заготовки при свободной прокатке в одноклетевом стане с обжатием 33 %

$$\frac{\partial N}{\partial v_{o0}} = 0; \tag{6.26а}$$

$$\frac{\partial N}{\partial v_\rho} = 0; \tag{6.26б}$$

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial v_{o0}\,\partial v_\rho} - \frac{\partial N}{\partial v_{o0}}\frac{\partial N}{\partial v_\rho}\right)\Big|_{v_{o0}=\bar{v}_{o0},\ v_\rho=\bar{v}_\rho} < 0; \tag{6.26в}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial v_{o0}^2}\Big|_{v_{o0}=\bar{v}_{o0},\ v_\rho=\bar{v}_\rho} > 0; \tag{6.26г}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial v_\rho^2}\Big|_{v_{o0}=\bar{v}_{o0},\ v_\rho=\bar{v}_\rho} > 0, \tag{6.26д}$$

где $\bar{v}_{o0}$, $\bar{v}_\rho$ — корни системы уравнений (6.26, а, б), удовлетворяющие условию (6.26в).

Исходно принята гипотеза усреднения осевых скоростей течения v_z по ширине калибра и толщине стенки заготовки, поэтому можно считать, что очаг деформации ограничен плоскостями $z = 0$ и $z = l_{max}$. Максимальная длина очага деформации l_{max} определится из условия

$$\frac{\partial l_д}{\partial \Theta} = 0; \tag{6.27а}$$

$$\frac{\partial^2 l_д}{\partial \Theta^2}\Big|_{l_д=l_{max}} < 0. \tag{6.27б}$$

Значения величин $\bar{v}_{o0}$ и $\bar{v}_\rho$, подставленные в соответствующие уравнения, позволяют рассчитать поля скоростей

течения. Используя уравнения (2.6) и (2.9), можно определить поля напряжений в очаге деформации. В рассматриваемой задаче осевое напряжение σ_z определяли по одному из дифференциальных уравнений равновесия, а остальные напряжения — из уравнений (2.9), при таком подходе к решению задачи формулы для определения нормальных напряжений имеют вид

$$\sigma_r = \frac{2T}{H}(e_r - e_z) + \sigma_z; \qquad (6.28а)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{2T}{H}(e_\Theta - e_z) + \sigma_z; \qquad (6.28б)$$

$$\sigma_z = -\int_{l_{max}}^{z}\left(\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial\Theta}\right)dz + \sigma_{вн}^{(0)}, \qquad (6.28в)$$

где $\tau_{rz} = \frac{T}{H}\dot{\gamma}_{rz}$; $\tau_{\Theta z} = \frac{T}{H}\dot{\gamma}_{\Theta z}$.

Как следует из выражения (6.28в), осевое нормальное напряжение не удовлетворяет граничному условию $z = 0$, $\sigma_z = \sigma_{вн}^{(1)}$. Добиться соблюдения указанного граничного условия можно введением в исходные уравнения течения дополнительных коэффициентов или функций, подлежащих определению из уравнения $\sigma_z|_{z=0} = \sigma_{вн}^{(1)}$. Однако при таком подходе решение задачи значительно усложняется, поэтому при реализации математической модели на ЭВМ значения $\bar{v}_{00}$, $\bar{v}_\rho$ находили из системы уравнений

$$\frac{\partial N}{\partial v_\rho} = 0; \qquad (6.29а)$$

$$\left[-\int_{l_{max}}^{0}\left(\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\Theta z}}{\partial\Theta}\right)dz\right]_{\substack{r=\bar{r}\\ \Theta=\bar{\Theta}}} = \sigma_{вн}^{(1)}, \qquad (6.29б)$$

где $\bar{r}$, $\bar{\Theta}$ — средние значения координат в сечении выхода из очага деформации.

На рис. 73 представлена типичная расчетная эпюра распределения относительного радиального напряжения $n_r = \frac{\sigma_r}{2T}$ по поверхности контакта заготовки с валком при прокатке без натяжения ($\sigma_{вн}^{(0)} = \sigma_{вн}^{(1)} = 0$).

Глава седьмая

РЕДУЦИРОВАНИЕ ТРУБ

1. Изменение средней толщины стенки

Процесс безоправочной прокатки (редуцирования) является наиболее распространенной завершающей операцией для большинства технологических схем производства труб. Наличие редукционного стана позволяет резко сократить сортамент типоразмеров труб, производимых на основном агрегате установки, что положительно сказывается на технико-экономических параметрах всей технологической линии в целом.

Одна из органических особенностей процесса безоправочной прокатки труб — неравномерность радиальных деформаций по периметру исходной заготовки. При прокатке заготовки с равномерной стенкой в одной клети это приводит к появлению поперечной разностенности на трубе (отклонению внутреннего контура поперечного сечения трубы от круга); при непрерывной безоправочной прокатке заготовки в нескольких клетях происходит аддитивное накопление искажений профиля внутренней поверхности, в результате чего в реальных условиях внутренний контур поперечного сечения трубы после редуцирования приближается к форме правильного многоугольника («граненость» трубы), размеры, число граней и ориентация которого зависят от конкретных условий прокатки: величины обжатия по радиусу трубы, характера его распределения по ширине калибра, числа валков в калибре и взаимного расположения их в клетях и группах клетей, натяжения между клетями стана, толстостенности и материала прокатываемой трубы, в меньшей степени — овализации трубы, коэффициента внешнего трения, калибровки валков.

Вторая характерная особенность процесса редуцирования — изменение средней толщины стенки исходной заготовки в процессе деформации. На величину и характер этого изменения влияют показатель исходной тонкостенности заготовки $\overline{T} = S_0/D_0$ (здесь S_0, D_0 — соответственно толщина стенки и диаметр заготовки до редуцирования) и коэффициент пластического натяжения $\overline{Z}^{(т)} = \sigma_z^{(т)}/\sigma_s$ (здесь $\sigma_z^{(т)}$ — напряжение натяжения).

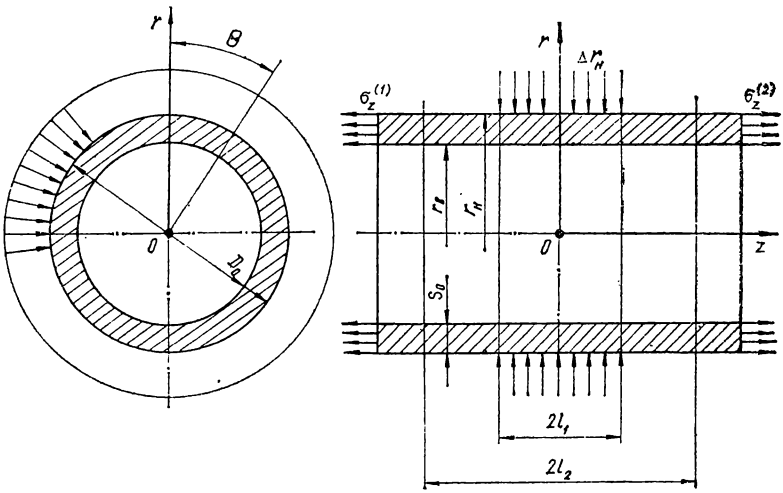

Рис. 74. Схема к определению длины зон внеконтактной деформации и изменения средней толщины стенки при редуцировании

Ниже сделана попытка создать аналитические модели изменения средней толщины стенки заготовки и формирования поперечной разностенности трубы при редуцировании. При решении поставленной задачи мы использовали в качестве исходных некоторые результаты эмпирических и аналитических исследований, выполненных А. П. Чекмаревым, А. А. Шевченко, В. П. Анисифоровым, Г. И. Гуляевым, В. Л. Колмогоровым, В. К. Смирновым, В. В. Ериклинцевым и др.

Идеализируем процесс редуцирования следующим образом (рис. 74): исходная заготовка представляет собой цилиндрическую бесконечно длинную трубу с постоянной по периметру и длине толщиной стенки; в зоне контакта деформирующего инструмента и заготовки внешняя поверхность последней обжимается равномерно по периметру на величину $\Delta r_н$; вследствие обжатия заготовки в контактной зоне ($2l_1$) ее материал подвергается формоизменению и во внеконтактной зоне, размеры которой равны $2\ (l_2 - l_1)$; на материал заготовки во внеочаговых зонах воздействуют осевые растягивающие напряжения $\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = \bar{\sigma}_z$; на поверхности контакта заготовки с инструментом отсутствуют напряжения внешнего контактного трения.

Задача сводится к определению величин зоны внеочаговой деформации и изменения исходной толщины стенки заготовки S_0 как функций размеров заготовки (S_0, D_0), величины напряжений натяжения $\bar{\sigma}_z$ и механических свойств деформируемого материала.

Для решения задачи используем исходное приближающее уравнение радиальных перемещений в контактной зоне [26] и методику поиска размеров зоны внеконтактной деформации [50]. Вследствие симметрии процесса во всех приведенных ниже выкладках рассмотрим половину заготовки ($z > 0$).

Запишем исходное приближающее уравнение для распределения радиальных перемещений в зоне контактной деформации ($0 \leqslant z \leqslant l_1$):

$$u_r^{\text{I}} = \frac{1}{r}\left(a\frac{r_{\text{н}}^2 - r^2}{2} - r_{\text{н}}\Delta r_{\text{н}}\right). \tag{7.1}$$

В соответствии с (7.1) компоненты T_e, удовлетворяющие (2.12а), определятся следующим образом:

$$e_r^{\text{I}} = -\left[a + \frac{a(r_{\text{н}}^2 - r^2) - 2r_{\text{н}}\Delta r_{\text{н}}}{2r^2}\right]; \tag{7.2а}$$

$$e_\theta^{\text{I}} = \frac{1}{r^2}\left(a\frac{r_{\text{н}}^2 - r^2}{2} - r_{\text{н}}\Delta r_{\text{н}}\right); \tag{7.2б}$$

$$e_z^{\text{I}} = a; \tag{7.2в}$$

$$\gamma_{rz}^{\text{I}} = 0. \tag{7.2г}$$

В соответствии с (7.2в) искомый коэффициент $a_j = a$ исходного приближающего уравнения (7.1) по физическому смыслу представляет собой осевую деформацию в зоне контактной деформации. Используя (7.2а—г), получаем значение интенсивности сдвиговых деформаций в зоне контактной деформации

$$\Gamma^{\text{I}} = \frac{1}{r^2}\sqrt{(3r^4 + r_{\text{н}}^4)a^2 + 4(\Delta r_{\text{н}} - ar_{\text{н}})r_{\text{н}}\Delta r_{\text{н}}}. \tag{7.3}$$

Для зоны внеочаговой деформации функции перемещений и деформаций должны удовлетворять граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u_r^{II} &= u_r^{I} \\ \frac{\partial u_r^{II}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } z = l_1; \qquad \begin{matrix} (7.4а) \\ (7.4б) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} u_r^{II} &= 0 \\ \frac{\partial u_r^{II}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } z = l_2. \qquad \begin{matrix} (7.4в) \\ (7.4г) \end{matrix}$$

Необходимость соблюдения граничных условий (7.4) определяется следующими соображениями: на границе зон контактной и внеконтактной деформации радиальные перемещения стыкуются (7.4а); на этой же границе стыкуются значения всех компонент T_e (7.4а,б); на границе зоны внеочаговой деформации и недеформируемой жесткой части заготовки стыкуются как значения радиальных перемещений, так и значения всех компонент T_e в соответствии с условиями $u_r^{II} = 0$, $e_{iк} = 0$ (7.4в,г).

Представим функцию радиальных перемещений в зоне внеконтактной деформации в виде

$$u_r^{II} = u_r^{I} + \Phi(z). \qquad (7.5)$$

В соответствии с (7.4) функция $\Phi(z)$ в выражении (7.5) должна отвечать граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } z = l_1; \qquad \begin{matrix} (7.6а) \\ (7.6б) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -u_r^{I} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } z = l_2. \qquad \begin{matrix} (7.6в) \\ (7.6г) \end{matrix}$$

Подберем функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую комплексу граничных условий (7.6 а—г). Пусть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (z - l_1)(z - l_2) A(r). \qquad (7.7)$$

Функция (7.7) удовлетворяет (7.6 б, г).

Проинтегрируем (7.7):

$$\Phi = A(r) \int (z - l_1)(z - l_2)\, dz + C(r), \qquad (7.8)$$

где $C(r)$ — функция, удовлетворяющая (7.6а).

Определив $C(r)$, получим

$$\Phi = A(r)\left\{z\left[z\left(\frac{z}{3} - \frac{l_1 + l_2}{2}\right) + l_1 l_2\right] + \frac{l_1^3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{l_1}{l_2}\right)\right\}. \quad (7.9)$$

Функцию $A(r)$ определим из условия удовлетворения функцией (7.9) граничного условия (7.6в). После соответствующих преобразований получим окончательное выражение для искомой функции $\Phi(z)$, удовлетворяющей комплексу (7.6а—г)

$$\Phi(z) = \frac{-6u_r^{\mathrm{I}}\left\{z\left[z\left(\frac{z}{3} - \frac{l_1 + l_2}{2}\right) l_1 l_2\right] + \frac{1}{2} l_1^3\left(\frac{1}{3} - \frac{l_1}{l_2}\right)\right\}}{(l_1 - l_2)^3}. \quad (7.10)$$

Подставляя (7.10) в исходное выражение для радиальных перемещений (7.5), после соответствующих математических преобразований получаем значения компонент тензора T_e для зоны внеочаговой деформации

$$e_r^{\mathrm{II}} = e_r^{\mathrm{I}}[1 - 6\tilde{\varphi}(z)]; \quad (7.11а)$$

$$e_\Theta^{\mathrm{II}} = e_\Theta^{\mathrm{I}}[1 - 6\tilde{\varphi}(z)]; \quad (7.11б)$$

$$e_z^{\mathrm{II}} = e_z^{\mathrm{I}}[1 - 6\tilde{\varphi}(z)]; \quad (7.11в)$$

$$\gamma_{rz}^{\mathrm{II}} = \frac{6(z - l_1)(z - l_2) u_r^{\mathrm{I}}}{(l_1 - l_2)^3}, \quad (7.11г)$$

где $\tilde{\varphi}(z) = \dfrac{\Phi(z)}{u_r^{\mathrm{I}}}$.

Интенсивность сдвиговых деформаций во внеконтактной зоне определится выражением

$$\Gamma^{\mathrm{II}} = \sqrt{(\Gamma^{\mathrm{I}})^2[1 - 6\tilde{\varphi}(z)]^2 + \frac{36(u_r^{\mathrm{I}})^2(z - l_1)^2(z - l_2)^2}{(l_1 - l_2)^6}}. \quad (7.12)$$

Выдвигая условие минимизации полной работы деформации, определяем значения постоянных a, l_2 из системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \Pi}\left\{\int_0^{2\pi}\int_{r_{\mathrm{B}}}^{r_{\mathrm{H}}}\int_0^{l_1}\left[\int_0^{\Gamma^{\mathrm{I}}} T(\Gamma)\, d\Gamma\right] dz\, dr\, d\Theta + \right.$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_{r_{\mathrm{B}}}^{r_{\mathrm{H}}}\int_{l_1}^{l_2}\left[\int_0^{\Gamma^{\mathrm{II}}} T(\Gamma)\, d\Gamma\right] dz\, dr\, d\Theta -$$

$$\left. - \int_0^{2\pi}\int_{r_{\mathrm{B}}}^{r_{\mathrm{H}}} \bar{\sigma}_z u_z^{\mathrm{II}}|_{z=l_1}\, dr\, d\Theta\right\} = 0 \quad (7.13)$$

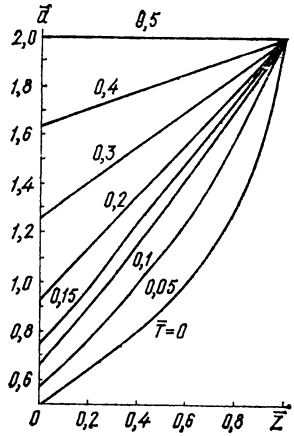

Рис. 75. Расчетная зависимость $\bar{a}$ от $\bar{z}=\bar{\sigma}_z\sigma_s^{-1}$ при $\Delta r_н r_н^{-1}=0{,}12$

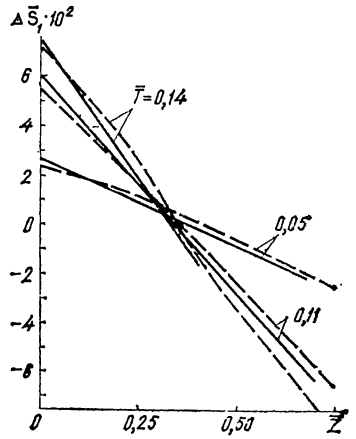

Рис. 76. Эмпирические (сплошные линии) и расчетные (пунктир) зависимости $\Delta\bar{S}_1(\bar{Z}, \bar{T})$

где $\Pi=(a;\ l_2)$; $u_z^{II}|_{z=l_2}$ — осевое перемещение на границе зоны формоизменения,

$$u_z^{II}|_{z=l_2}=\int_{l_1}^{l_2} e_z^{II}\,dz+e_z^{I}l_1.$$

На рис. 75 приведены расчетные значения функции $\bar{a}=\bar{a}(\bar{Z}, \bar{T})$, полученные при реализации системы (7.13) для случая деформации идеально пластичного материала (здесь $\bar{a}=ar_н\Delta r_н^{-1}$). Заметим, что при $\bar{T}\to0$ значения $\bar{a}$, рассчитанные по (7.13), совпадают со значениями $\bar{a}$, рассчитанными по методике В. Л. Колмогорова:

$$\bar{a}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3\bar{Z}}{\sqrt{4-3\bar{Z}^2}}\right). \tag{7.14}$$

Значения коэффициентов $\bar{a}$ позволяют определить параметры относительного изменения средней толщины стенки при редуцировании по одной из трех приведенных ниже формул

$$\Delta\bar{S}_1=\frac{\Delta S_0}{\Delta D}=\frac{[1-\bar{a}(1-\bar{T})]\,\bar{T}}{1-2\bar{T}}; \tag{7.15а}$$

$$\Delta\bar{S}_2=\frac{\Delta S_0}{S_0}=\frac{[1-\bar{a}(1-\bar{T})]\,\varepsilon}{1-2\bar{T}}; \tag{7.15б}$$

$$\Delta\bar{S}_3=\frac{S_п}{S_0}=1+\frac{1-\bar{a}(1-\bar{T})}{1-2\bar{T}}\left(1-\frac{D_п}{D_0}\right), \tag{7.15в}$$

где ΔS_0 — абсолютное изменение средней толщины стенки заготовки в результате редуцирования, $\Delta S_0 = S_п - S_0$; S_0, $S_п$ — абсолютные значения средней толщины стенки соответственно до и после редуцирования; ΔD — абсолютное обжатие по диаметру, $\Delta D = D_0 - D_п$; D_0, $D_п$ — диаметр образующей внешней поверхности в контактной зоне соответственно до и после редуцирования; ε — относительное обжатие по диаметру, $\varepsilon = \frac{\Delta D}{D_0}$.

На рис. 76 приведены расчетные и эмпирические зависимости $\Delta\bar{S}_1(\bar{Z}, \bar{T})$ (эмпирические графики построены по данным исследований [120]). Близкое совпадение расчетных и эмпирических значений исследуемого параметра позволяет рекомендовать результаты проведенного исследования для практического использования.

2. Формирование поперечной разностенности

Геометрические соотношения в очаге деформации. По математической сути определение геометрических параметров очага деформации при продольной прокатке труб сводится к решению задачи о пересечении поверхностей валка и заготовки [121, 122].

Уравнение контура наружной поверхности идеально круглой (неовализованной) заготовки в системе координат xOy (рис. 77) имеет вид

$$r_н^2 = x^2 + y^2. \tag{7.16}$$

Уравнение контура поверхности калибра в плоскости осей валков ($z = 0$) запишем в виде

$$R_{кл}^2 = x^2 + (y + e)^2, \tag{7.17}$$

где $R_{кл}$ — радиус калибра.

Радиальное обжатие за проход определится из выражения

$$\Delta r_{н0} = r_н - r_т, \tag{7.18}$$

где $r_т$ — внешний радиус трубы после деформации в данном калибре, $r_т = \overline{OB}$.

Из треугольника OBO_1 определим

$$r_т = \frac{R_{кл} \sin [\Theta - \arcsin (eR_{кл}^{-1} \sin \Theta)]}{\sin \Theta}. \tag{7.19}$$

С учетом соотношения (7.18) получим

$$\Delta r_{н0} = r_н \left\{1 - \frac{R_{кл} \sin [\Theta - \arcsin (eR_{кл}^{-1} \sin \Theta)]}{r_н \sin \Theta}\right\}. \tag{7.20}$$

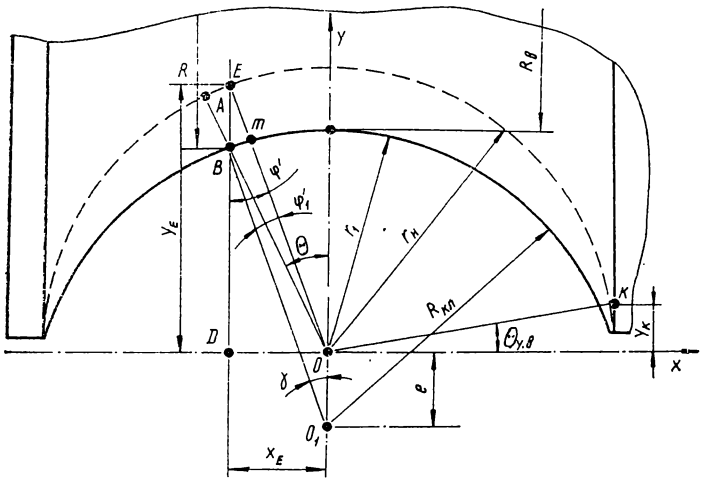

Рис. 77. Схема очага деформации

Распределение функции обжатий по длине и ширине очага деформации получим, рассмотрев его сечение диаметральной плоскостью валка, следом которой на поверхности последнего является линия ED. Суммарное высотное обжатие по этому произвольному сечению определится как

$$\Delta\bar{r}_{н0} = y_E - r_т \cos\Theta, \tag{7.21}$$

где y_E — ордината точки E.

Значение y_E получим, подставив в уравнение контура поверхности заготовки (7.16) выражение

$$x_E = r_т \sin\Theta.$$

После преобразований получим

$$y_E = \sqrt{r_н^2 - r_т^2 \sin^2\Theta}. \tag{7.22}$$

Подставив (7.22) в (7.21), получим для плоскости выхода из очага деформации ($z = 0$)

$$\Delta\bar{r}_{н0} = r_т\left(\sqrt{r_н^2 r_т^{-2} - \sin^2\Theta} - \cos\Theta\right). \tag{7.23}$$

Зная величину $\Delta\bar{r}_н$ и значение радиуса валка как функцию угла Θ

$$R = R_в + r_т|_{\Theta=0} - r_т \cos\Theta, \tag{7.24}$$

по известной из теории прокатки формуле определяем значение текущей длины очага деформации

$$l_{д} = \sqrt{2R\Delta\bar{r}_{н0}}. \qquad (7.25)$$

Функция распределения высотных обжатий с учетом зависимости (7.25) принимает вид:

$$\Delta\bar{r}_{н} = \Delta\bar{r}_{н0} - \frac{z^2}{2R}. \qquad (7.26)$$

Из треугольника OmB (точка m (рис. 77) — произвольная точка на контактной поверхности в произвольном продольном сечении очага деформации) определим функцию распределения радиальных обжатий:

$$\Delta r_{н} = r_{н} - r_{т}\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi'}. \qquad (7.27)$$

Угол φ' определим из системы уравнений, связывающих геометрические параметры:

$$\operatorname{tg}[0{,}5(\varphi' - \varphi_1')] + \frac{z^2 - 2Rr_{т}}{z^2 + 2Rr_{т}}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = 0;\quad \varphi_1' + \varphi' - \Theta = 0. \qquad (7.28)$$

Координаты точки пересечения контуров поверхностей заготовки и калибра, определяющие точку отрыва металла от поверхности валков на выходе из очага деформации, связаны соотношениями

$$y_{К} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_{кд}^2 - r_{н}^2}{e} - e\right);$$

$$x_{К} = \arcsin\frac{y_{К}}{r_{н}}. \qquad (7.29)$$

Значение угла выпуска $\Theta_{у.в}$ определится из выражения

$$\Theta_{у.в} = \arcsin\frac{y_{К}}{r_{н}}.$$

Таким образом, геометрические параметры очага деформации полностью определены.

Как известно, реальный процесс прокатки труб в овальных калибрах многовалкового безоправочного стана заключается в деформировании овализованных труб с обжатием в направлении бóльшей оси овала. Очевидно, что в процессе прохождения очага деформации контур поперечного сечения трубы при переориентации овала обязательно принимает форму, близкую к кругу.

Анализ экспериментальных и расчетных данных работ [120—122] показал, что при безоправочной прокатке труб

заполнение калибра металлом практически осуществляется вблизи первичного контакта трубы с валком. До этого момента труба подвергается в основном сплющиванию без существенного изменения периметра [123]. При этом прокатка овальной и округленной трубы сопровождается практически одинаковым распределением радиальных деформаций по периметру трубы [120].

Для упрощения модели деформирования принимаем, что округление трубы совпадает с моментом заполнения калибра металлом, а протяженность очага деформации принимаем равной некоторой средней его величине по ширине калибра.

Учитывая малые деформации и овальности применяемых при редуцировании калибров и имеющуюся их взаимосвязь, допустимо принять, что диаметр округленной задаваемой в калибр трубы равен ширине калибра.

Геометрические соотношения в очаге деформации упрощаются при прокатке без зазора между валками ($\theta_{у.в} = 0$). При этом

$$R_{кл} = \sqrt{r_н^2 + e^2}. \tag{7.30}$$

Формулы (7.23) и (7.25) можно значительно упростить. Из геометрических соотношений (см. рис. 77) следует

$$r_т|_{\theta=0} = R_{кл} - e. \tag{7.31}$$

Тогда выражение (7.18) с учетом (7.30) и (7.31) приводим к виду

$$\Delta\bar{r}_{н0}|_{\theta=0} = \sqrt{R_{кл}^2 - e^2} - R_{кл} + e.$$

Так как $e \ll R_{кл}$, то можно принять, что $\Delta\bar{r}_{н0}(\Theta = 0) \cong e$, высотные обжатия по периметру калибра меняются незначительно ($\Delta\bar{r}_{н0} = \text{const} \cong e$), а радиальные обжатия можно связать с высотным соотношением $\Delta r_н \approx \Delta\bar{r}_н \cos\Theta$. С учетом упрощений среднюю длину очага деформации принимаем равной

$$l_д \approx \sqrt{2eR_в} = \text{const}. \tag{7.32}$$

Радиальное обжатие определим выражением

$$\Delta r_н = \left(1 - \frac{z^2}{l_д^2}\right) e\cos\Theta. \tag{7.33}$$

В табл. 7 приведены сравнительные результаты расчета геометрических параметров по точным и приближенным формулам. Из приведенных данных следует, что различия в значениях величин, рассчитанных по точным и приближенным формулам, невелики. Это позволяет использовать в дальнейшем анализе выражения (7.32) и (7.33).

Таблица 7. Расчетные значения геометрических параметров при $r_н = 50$ мм, $e = 5$ мм, $z = 0$ (сечение выхода из очага деформации)

Параметр, мм	Текущее значение координатного угла Θ, рад										Примечания	
	$\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{4\pi}{2}$	Расчетная формула	$R_в$, мм
$\Delta r_н$	4,75	4,68	4,48	4,14	3,70	3,11	2,44	1,68	0,86	0	(7.27)	—
$\Delta r_н$	5,00	4,97	4,70	4,33	3,83	3,21	2,50	1,71	0,87	0	(7.33)	50
$r_т$	45,25	45,32	45,52	45,86	46,30	46,89	47,56	48,32	49,14	50,00	(7.19)	—
$\Delta\bar{r}_н$	4,75	4,75	4,74	4,72	4,71	4,64	4,56	4,40	4,03	0	(7.26)	—
R	50,02	50,62	52,47	55,53	59,77	65,09	71,45	78,70	86,68	95,25	(7.24)	50
$l_д$	21,80	21,93	22,30	22,90	23,73	24,58	25,53	26,32	26,43	0	(7.25)	50
$l_д$	22,36										(7.32)	50
R	150,02	150,62	152,47	155,53	159,77	165,09	171,45	178,70	186,68	195,25	(7.24)	150
$l_д$	37,75	37,83	38,02	38,32	38,79	39,14	39,54	39,66	38,79	0	(7.25)	150
$l_д$	38,73										(7.32)	150

Идеализация реального процесса. В основу идеализации процесса редуцирования трубчатых заготовок в одной клети по системе круг — овал заложено допущение об идентичности деформационных параметров процессов прокатки и осадки фигурными бойками. Сделанное допущение базируется на результатах разработки АММ изменения средней толщины стенки заготовки.

Проведем анализ следующей идеализированной схемы формоизменения. Исходная цилиндрическая заготовка со стенкой S_0 в начальный момент входит в контакт с бойком, который плотно облегает ее на участке длиной $l_д$. Далее гипотетический боек — пластина — начинает изменять свою форму таким образом, что в конце этого процесса заготовка принимает вид заторможенной в очаге деформации одноклетевого редукционного стана трубы. Иными словами, в ходе акта формоизменения боек принимает форму контактной поверхности очага деформации редукционного стана.

Принципиально замена истинной картины пластического течения предложенной идеализированной моделью процесса базируется на допущении о том, что параметры течения не зависят от истории нагружения (деформирования) и однозначно определяются исходными и конечными значениями составляющих девиатора деформаций. В результате деформации толщина стенки исходной заготовки S_0 изменяется до S_1. Толщина стенки изменяется относительно исходной величины S_0 так, что полная работа формоизменения принимает минимально возможное по гранично заданным условиям деформирования значение.

Цель дальнейшего решения — выявление функциональной зависимости $S_1 = S_1(z, \Theta)$, удовлетворяющей условию минимума энергетических затрат для конкретных граничных условий.

Кинематически возможные деформации и перемещения. В работе [124] Г. И. Гуляевым на основании обработки эмпирических данных получены аппроксимирующие функции для определения радиальных и тангенциальных деформаций в диаметральном сечении зоны формоизменения при холодном редуцировании труб в двухвалковом калибре. После некоторых преобразований в безразмерном виде указанные зависимости можно представить в виде

$$e_\Theta = -\frac{\Delta r_н^0}{r_н}\left\{\frac{r_н^2}{r^2}\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] + a_3\right\}; \qquad (7.34а)$$

$$e_r = \frac{\Delta r_н^0}{r_н}\left\{\frac{r_н^2}{r^2}\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] - a_3\right\}, \qquad (7.34б)$$

где $\Delta r_{\text{н}}^{0}$ — абсолютная величина текущего обжатия по радиусу заготовки в вершине калибра ($\Theta = 0$).

Из системы (7.34), используя (2.12а), получаем значение осевой деформации

$$e_z = 2a_3 \frac{\Delta r_{\text{н}}^{0}}{r_{\text{н}}}. \qquad (7.35)$$

Условие (7.35) указывает на то, что при холодном редуцировании имеет место высокая степень усреднения осевой деформации как по толщине стенки заготовки, так и по ширине калибра. Этим, вероятно, объясняется малая граненность труб при холодном редуцировании в шлифованных валках.

По данным Г. И. Гуляева [124], снижение степени чистоты обработки поверхности калибра и повышение температуры прокатки, т. е. увеличение напряжений контактного трения, существенно повышают неоднородность деформации (особенно по периметру) и, как следствие, увеличивают поперечную разностенность труб. Так как целью проводимого исследования является разработка универсальной АММ формирования поперечной разностенности при редуцировании, в качестве исходных подходящих уравнений примем следующие:

$$e_\Theta = \frac{-1}{r_{\text{н}}}\left(e - \frac{z^2}{2R_{\text{в}}}\right)\left\{\frac{r_{\text{н}}^2}{r^2}\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] + A_1\right\}; \qquad (7.36а)$$

$$e_r = \frac{1}{r_{\text{н}}}\left(e - \frac{z^2}{2R_{\text{в}}}\right)\left\{\frac{r_{\text{н}}^2}{r^2}\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] - A_2\right\}, \qquad (7.36б)$$

где A_1, A_2 — некоторые координатные функции, предположительно от Θ и r.

Из системы (7.36) следует, что в рассматриваемом случае величина осевой деформации выражается более общим, чем (7.35), уравнением

$$e_z = \frac{1}{R_{\text{н}}}\left(e - \frac{z^2}{2R_{\text{в}}}\right)(A_1 + A_2), \qquad (7.37)$$

откуда видно, что по своему физическому смыслу координатные функции A_j характеризуют неоднородность распределения осевой деформации по толщине стенки заготовки и ширине калибра.

Используя (7.36б), определяем закон распределения радиальных перемещений в очаге деформации

$$u_r = \frac{1}{r_{\text{н}}}\left(e - \frac{z^2}{2R_{\text{в}}}\right)\int_{r_{\text{н}}}^{r}\left\{\frac{r_{\text{н}}^2}{r^2}\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] - A_2\right\}dr + C_1, \qquad (7.38)$$

где C_1 — постоянная интегрирования, численно равная радиальному перемещению из контактной поверхности.

Подставляя в (7.38) значение

$$C_1 = -\left(e - \frac{z^2}{2R_в}\right)\cos\Theta, \tag{7.39}$$

после интегрирования и преобразований получаем

$$u_r = \left(\frac{z^2}{2R_в} - e\right)\left\{\left(\frac{r_н}{r} - 1\right)\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] + \frac{1}{r_н}\int_{r_н}^{r} A_2 dr + \cos\Theta\right\}. \tag{7.40}$$

Подставляя уравнение связи тангенциальных и радиальных перемещений с тангенциальной деформацией $e_\Theta r = \frac{\partial u_\Theta}{\partial\Theta} + u_r$ в выражения (7.36) и (7.40), получаем

$$\frac{\partial u_\Theta}{\partial\Theta} = -\left(e - \frac{z^2}{2R_в}\right)\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2 + \frac{1}{r_н}\left(A_1 r - \int_{r_н}^{r} A_2 dr\right) - \cos\Theta\right]. \tag{7.41}$$

Из (7.41) определяем координатную функцию распределения тангенциальных перемещений в очаге деформации

$$u_\Theta = \left(\frac{z^2}{2R_в} - e\right)\int_0^\Theta\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2 + \frac{1}{r_н}\left(A_1 r - \int_{r_н}^{r} A_2\, dr\right) - \cos\Theta\right] d\Theta + C_2, \tag{7.42}$$

где C_2 — постоянная интегрирования, численно равная тангенциальному смещению в вершине калибра (при $\Theta = 0$).

Исходя из условия симметрии параметров деформации относительно вершины калибра, можно утверждать, что имеет место равенство

$$u_\Theta\big|_{\Theta=0} = 0. \tag{7.43}$$

Из (7.43) следует, что $C_2 = 0$ и, таким образом, после интегрирования (7.42) получим

$$u_\Theta = \left(\frac{z^2}{2R_в} - e\right)\left\{\left[\frac{a_1}{3}\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right]\theta + \frac{1}{r_н}\int_0^\Theta\left(A_1 r -\right.\right.$$

$$- \int_{r_н}^{r} A_2 dr \Big) d\Theta - \sin\Theta \Big] \Big\}. \qquad (7.44)$$

В соответствии с условием симметрии должно соблюдаться кинематическое граничное условие

$$\Theta = \frac{\pi}{2}; \quad u_\Theta = 0. \qquad (7.45)$$

Значения A_j будем искать из условия соблюдения функцией тангенциальных перемещений (7.44) кинематического ограничения (7.45).

Подставив (7.45) в (7.44), получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(A_1 r - \int_{r_н}^{r} A_2 dr \right) d\Theta = \left[1 - \left(\frac{a_1}{3} + a_2 \right) \frac{\pi}{2} \right] r_н. \qquad (7.46)$$

Решение интегрального уравнения (7.46) невозможно без введения дополнительного допущения о характере функций A_j.

Предположим, что координатная функция изменения осевых деформаций e_z по ширине калибра имеет вид

$$e_z = B (a_3 + a_4 \cos^2\Theta + a_7 \sin^2\Theta \cos^2\Theta) \left(e - \frac{z^2}{2R_в} \right) \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{r_н}. \qquad (7.47)$$

Выбор вида функции $e_z = e_z(\Theta)$ не случаен и основывается на необходимости соблюдения ограничений

$$\left. \frac{\partial e_z}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=0} = \left. \frac{\partial e_z}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \qquad (7.48)$$

вытекающих из условий симметрии. Нетрудно убедиться в том, что если параметр B, входящий в (7.47), не является функцией угла Θ, условие (7.48) выполняется тождественно.

Далее предположим, что A_j можно представить в виде соотношений

$$A_1 = A(\Theta)\lambda_1; \qquad (7.49)$$

$$A_2 = A(\Theta)\lambda_2, \qquad (7.50)$$

где λ_j — координатные функции от r либо константы, $j = 1; 2$.

Подставляя (7.47)—(7.50) в (7.37), после преобразований получаем

$$A(\Theta) = B (a_3 + a_4 \cos^2\Theta + a_7 \sin^2\Theta \cos^2\Theta). \qquad (7.51)$$

Подставляя (7.49)—(7.51) в (7.46) и интегрируя, получаем соотношение

$$B\left(\lambda_1 r - \int_{r_н}^{r} \lambda_2 dr\right) = B_1 r_н, \tag{7.52}$$

где

$$B_1 = \frac{\frac{2}{\pi} - \frac{a_1}{3} - a_2}{a_3 + \frac{a_4}{2} + \frac{a_7}{8}}.$$

Уравнение (7.52) содержит три неизвестных — B, λ_1, λ_2, и любые значения этих величин, удовлетворяющие соотношению (7.52), можно принять за подходящие в смысле выполнения условия (7.45). Этот факт предопределяет определенный произвол в определении значений B, λ_1, λ_2. В работе [125] предложено решение

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \\ &B = B_1; \\ &a_7 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

Используя (7.53) в ранее полученных выражениях для определения деформаций, получаем в окончательном виде

$$e_\Theta = \left(\frac{z^2}{l_д^2} - 1\right)\left\{\frac{r_н^2}{r^2}\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] + \frac{\left(\frac{2}{\pi} - \frac{a_1}{3} - a_2\right)(1 + a_5\cos^2\Theta)}{1 + 0{,}5a_5}\right\}\varepsilon; \tag{7.54а}$$

$$e_r = \left(1 - \frac{z^2}{l_д^2}\right)\left\{\frac{r_н^2}{r^2}\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] + \frac{\left(\frac{a_1}{3} + a_2 - \frac{2}{\pi}\right)(1 + a_5\cos^2\Theta)}{1 + 0{,}5a_5}\right\}\varepsilon; \tag{7.54б}$$

$$e_z = \frac{4\varepsilon}{2 + a_5}\left(1 - \frac{z^2}{l_д^2}\right)\left(\frac{2}{\pi} - \frac{a_1}{3} - a_2\right)(1 + a_5\cos^2\Theta), \tag{7.54в}$$

где $a_5 = a_4/a_3$; $\varepsilon = e/r_н$.

Значения сдвиговых деформаций можно определить, лишь зная перемещения. Величины u_r и u_Θ определятся из (7.40) и (7.44):

$$u_r = \left(1 - \frac{z^2}{l_д^2}\right)\left\{\left(1 - \frac{r_н}{r}\right)\left[a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2 + a_2\right] -$$

$$- \frac{\left(\frac{2}{\pi} - \frac{a_1}{3} - a_2\right)(1 + a_5 \cos^2 \Theta)\left(\frac{r}{r_н} - 1\right)}{1 + 0{,}5a_5} - \cos\Theta\Bigg\} \varepsilon r_н; \quad (7.55)$$

$$u_\Theta = \left(1 - \frac{z^2}{l_д^2}\right)\left\{\left(\frac{a_1}{3} + a_2 - \frac{2}{\pi}\right)[\Theta + 0{,}5a_5(\Theta + 0{,}5\sin 2\Theta)] + \right.$$

$$\left. + (1 + 0{,}5a_5)\left[\sin\Theta - \left(\frac{4\Theta^2 a_1}{3\pi^2} + a_2\right)\Theta\right]\right\} \frac{\varepsilon r_н}{1 + 0{,}5a_5}. \quad (7.56)$$

Осевое смещение определяем, используя уравнение связи деформаций и перемещений

$$u_z = \int e_z dz + C_з. \quad (7.57)$$

Постоянную интегрирования $C_з$ определим, исходя из предположения, что в очаге деформации имеется линия раздела течения металла, имеющая уравнение $z = \text{const}$. Будем считать, что правомерно граничное условие

$$u_z\big|_{z=a_в l_д} = 0. \quad (7.58)$$

Подставляя значение (7.54а) в (7.57), после интегрирования и подстановки (7.58) окончательно получаем

$$u_z = \frac{4\left(\frac{2}{\pi} - \frac{a_1}{3} - a_2\right)(1 + a_5 \cos^2 \Theta)}{2 + a_5}\left[\left(1 - \frac{z^2}{3l_д^2}\right)\frac{z}{l_д} - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{a_в^2}{3}\right)a_в\right]\varepsilon l_д. \quad (7.59)$$

Используя (7.55), (7.56), (7.59) в уравнениях связи перемещений и сдвиговых деформаций, можно определить γ_{rz}, $\gamma_{r\Theta}$, $\gamma_{z\Theta}$.

Реализация модели. Для определения величин искомых коэффициентов a_j (j равен 1; 2; 5; 6) воспользуемся уравнением принципа минимума полной работы деформации; система уравнений, из которой определим значения a_j, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\int_D\int\int\left(\int_0^\Gamma T\, d\Gamma\right)dW - \int_{S_{к0}}\int \tau U_{к0} dS - \right.$$

$$\left. - \int_{F^{(п)}}\int \sigma_{z_*}^{(п)} u_z^{(п)} dF - \int_{F^{(з)}}\int \sigma_{z_*}^{(з)} u_z^{(з)} dF\right] = 0, \quad (7.60)$$

где D — объем геометрического очага деформации, ограниченного диаметральными плоскостями $z = 0$, $z = l_д$ и поверхностями образующих внутреннего и внешнего контуров заго-

товки; $S_{ко}$ — поверхность контакта заготовки с деформирующим инструментом; $U_{ко}$ — перемещения материала заготовки на контактной поверхности; $u_z^{(п)}$, $u_z^{(з)}$ — перемещения границ геометрического очага деформации, $u_z^{(п)} = u_z|_{z=0}$; $u_z^{(з)} = u_z|_{z=l_д}$; $\sigma_{z_*}^{(п)}$, $\sigma_{z_*}^{(з)}$ — внешние напряжения натяжения соответственно в сечениях $z = 0$ и $z = l_д$; $F^{(п)}$, $F^{(з)}$ — площади диаметральных сечений заготовки плоскостями с координатами $z = 0$ и $z = l_д$ соответственно.

Рассмотрим более подробно структуру компонент уравнения (7.60). Идеализируя деформируемый материал как тело Бингама (рис. 12б), получаем

$$\int\int\int_D \left(\int_0^{\Gamma} T d\Gamma\right) dW = \int\int\int_D \left(b_1^* \frac{\Gamma^2}{2} + k^* \Gamma\right) dW. \qquad (7.61)$$

Величина $U_{ко}$ определится из выражения

$$U_{ко} = \sqrt{u_{zк}^2 + u_{\theta к}^2}, \qquad (7.62)$$

где $u_{zк}$, $u_{\theta к}$ — осевое и тангенциальное перемещения на контактной поверхности.

По своей физической сути процесс редуцирования сходен с процессом прокатки высоких полос и характеризуется относительно большими значениями напряжений τ (коэффициент трения при редуцировании лежит в пределах $f = 0{,}35 \div 0{,}45$ при горячей и $f = 0{,}20 \div 0{,}25$ — холодной прокатке) и, как следствие, наличием зоны прилипания. В связи с этим, используя результаты анализа, проведенного в § 3 гл. 2, для определения напряжений τ используем условие (2.46), в котором показатель трения $f_т(z)$ имеет вид функции (2.54), где $x = z$; $x_н = a_в l_д$; $f_{т1} = f_{т1}^*$; $f_{т2} = f_{т2}^*$. Окончательно с учетом противонаправленности векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{U}_{ко}$ получим

$$\int\int_{S_{ко}} \tau U_{ко} dS = -\int\int_{S_{ко}} f_т(z)\, T_{ко} U_{ко} dS, \qquad (7.63)$$

где $T_{ко}$ — интенсивность сдвиговых напряжений на контактной поверхности.

После подстановки (7.61) — (7.63) в (7.60) и дифференцирования по a_j получим в окончательном виде систему уравнений для определения искомых коэффициентов

$$\Phi,_{a_j} = 0 \qquad (7.64)$$

(значение величины Φ дано в квадратных скобках в (7.60)).

Для решения системы (7.64) относительно a_j использовали итерационный метод, аналогичный методу простой итерации Гаусса — Зейделя, применяемому для численного решения систем линейных уравнений. Линеаризацию системы (7.64) осуществляли путем замены в каждом из уравнений части неизвестных их значениями из предыдущего цикла итерации. В результате проведенных преобразований система распадается на четыре квазинезависимых линейных уравнения, что достигается следующей схемой замен:

$$\Phi, {}_{a_1}(a_1^*, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_6) = 0; \tag{7.65а}$$

$$\Phi, {}_{a_2}(\bar{a}_1^*, a_2^*, \bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_6) = 0; \tag{7.65б}$$

$$\Phi, {}_{a_5}(\bar{a}_1^*, \bar{a}_2^*, a_5^*, \bar{a}_5, \bar{a}_6) = 0; \tag{7.65в}$$

$$\Phi, {}_{a_6}(\bar{a}_1^*, \bar{a}_2^*, \bar{a}_5^*, a_6^* \bar{a}_6) = 0, \tag{7.65г}$$

где $\bar{a}_j^*$, a_j^* — найденная и искомая в данном цикле итерации величина; $\bar{a}_j$ — величина, определенная в предыдущем цикле итерации.

Как известно, при использовании метода итерации первостепенное значение для сходимости процесса имеет выбор начальных приближений. В рассматриваемой задаче область поиска величин a_j может быть ограничена на основании следующих логических рассуждений.

При деформации без внешнего воздействия и при деформации с равными или близкими по величине усилиями переднего и заднего натяжения (подпора) должно соблюдаться условие $0 < a_6 < 1$. Осевая деформация положительна, поэтому в соответствии с уравнением (7.54в) область физически допустимых значений a_1, a_2, a_5 определяется соотношением

$$\frac{(1 + a_5 \cos^2 \Theta)\left(\frac{2}{\pi} - \frac{a_1}{3} - a_2\right)}{1 + 0{,}5a_5} > 0. \tag{7.66}$$

Блок-схема алгоритма расчета параметров a_j по изложенной методике приведена на рис. 78. Значения a_j^* в каждом из уравнений (7.65) находили методом половинного деления; подпрограмма расчета a_j^* в блок-схеме алгоритма не приведена. Для ускорения сходимости итерационного процесса область выбора нулевых приближений a_{j_0} определяли предварительным сканированием в пределах $-2 < a_j < 2$. Как показали результаты расчетов, в указанных для a_j пределах даже при относительно крупной сетке сканирования можно выбрать a_{j_0}, довольно близкие к решению нелинейной системы.

К анализу процессов горячей и холодной прокатки подходили дифференциально. При горячей деформации в (7.61)

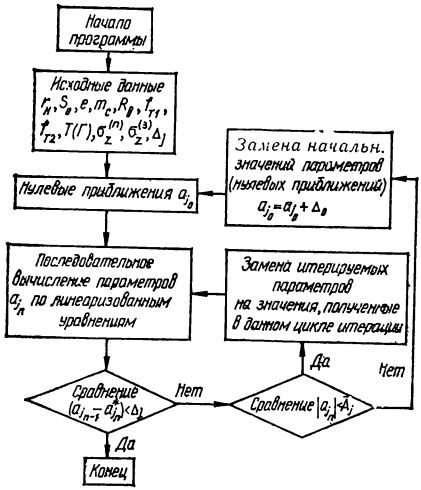

Рис. 78. Блок-схема алгоритма расчета коэффициентов a_j:
Δ_j — заданная точность по стабилизации значений a_j; A_j — заданная область сходимости процесса итерации

принимали $k^* = 0$, а величину b_1^* определяли как функцию среднего относительного обжатия по зависимостям, аналогичным приведенным на рис. 13. При холодной деформации b_1^*, k^* в (7.61) вычисляли как функцию средней интенсивности Г по схеме определения констант уравнения аппроксимации истинной зависимости $T - \Gamma$, приведенной в работе [26].

Анализ результатов реализации модели. Реализация изложенной выше математической модели позволила определить значения коэффициентов a_j, входящих в уравнения, описывающие процесс безоправочного редуцирования труб в одной клети по схеме круг—овал. В табл. 8 приведены значения коэффициентов $a_j = a_j(m_c, \bar{T})$ при горячей деформации труб из нержавеющей и углеродистой сталей (здесь $m_c = 0{,}637\,\varepsilon$ — средняя частная деформация). Зависимости, представленные в табл. 8, получены для случая прокатки без натяжения. Расчеты, выполненные для случаев, когда имеет место переднее, заднее либо совместное натяжение, позволили получить графики $a_j = a_j(\bar{T}, \varepsilon, \sigma_z^{(п)}, \sigma_z^{(з)})$.

Обобщение результатов расчетов позволило предложить аппроксимирующую зависимость

$$a_{j_{вн}} = a_j n_{1j} n_{2j} n_{3j}, \qquad (7.67)$$

где $a_{j_{вн}}$ — значение коэффициента с учетом внешнего воздействия; a_j — значение коэффициента, рассчитанное для случая $\sigma_z^{(п)} = \sigma_z^{(з)} = 0$; n_{1j} — поправочный коэффициент, учитывающий влияние переднего натяжения, $n_{1j} = n_{1j}(\bar{\sigma}_{z\,п})$; n_{2j} — поправочный коэффициент, учитывающий влияние заднего натяжения, $n_{2j} = n_{2j}(\bar{\sigma}_{zз})$; n_{3j} — поправочный коэффициент, учитывающий совместное влияние переднего и заднего натяжения, $n_{3j} = n_{3j}(\bar{\sigma}_{z\,п}\,\bar{\sigma}_{z\,з})$; $\bar{\sigma}_{z\,п}$, $\bar{\sigma}_{z\,з}$ — коэффициенты переднего и заднего пластического натяжения (условные), $\bar{\sigma}_{z\,п} = \dfrac{\sigma_z^{(п)}}{\beta^* \sigma_т}$; $\bar{\sigma}_{z\,з} = \dfrac{\sigma_z^{(з)}}{\beta^* \sigma_т}$.

Таблица 8. Расчетные значения коэффициентов a_j при горячем редуцировании

$\bar{T}$	a_j	Среднее относительное обжатие m_c, %						Примечание
		2	4	6	8	10	12	
0,05	a_1	0,41	0,50	0,59	0,68	0,73	0,79	Углеродистая сталь
	a_2	0,40	0,38	0,37	0,36	0,35	0,33	
	a_5	—0,06	—0,10	—0,13	—0,18	—0,22	—0,24	
0,10	a_1	0,65	0,66	0,77	0,83	0,88	0,91	
	a_2	0,25	0,25	0,22	0,22	0,20	0,19	
	a_5	—0,08	—0,14	—0,19	—0,23	—0,28	—0,33	
0,20	a_1	0,53	0,56	0,67	0,75	0,85	0,92	
	a_2	0,20	0,19	0,15	0,12	0,08	0,05	
	a_5	—0,16	—0,21	—0,26	—0,30	—0,35	—0,40	
0,30	a_1	0,38	0,43	0,52	0,62	0,75	0,85	
	a_2	0,08	0,06	0,03	0,01	—0,02	—0,04	
	a_5	—0,27	—0,31	—0,36	—0,40	—0,45	—0,49	
0,40	a_1	0,27	0,27	0,33	0,37	0,46	0,50	
	a_2	—0,10	—0,10	—0,11	—0,12	—0,14	—0,15	
	a_5	—0,40	—0,42	—0,47	—0,50	—0,56	—0,59	
0,10	a_1	0,50	0,64	0,90	0,97	1,02	1,04	Нержавеющая сталь
	a_2	0,29	0,26	0,21	0,20	0,19	0,19	
	a_5	—0,10	—0,16	—0,21	—0,24	—0,30	—0,33	
0,15	a_1	0,53	0,69	0,93	1,03	1,11	0,16	
	a_2	0,16	0,10	0,03	0	—0,02	—0,05	
	a_5	—0,12	—0,18	—0,23	—0,26	—0,38	—0,35	
0,20	a_1	0,53	0,64	0,89	1,00	1,10	1,13	
	a_2	0,10	0,07	—0,01	—0,03	—0,07	—0,08	
	a_5	—0,18	—0,23	—0,29	—0,32	—0,37	—0,41	
0,30	a_1	0,55	0,66	0,78	0,87	1,03	1,08	
	a_2	—0,20	—0,27	—0,30	—0,32	—0,36	—0,38	
	a_5	—0,28	—0,32	—0,36	—0,40	—0,45	—0,50	

Графики для определения поправочных коэффициентов n_{1j}, n_{2j}, n_{3j} приведены на рис. 79.

Формула (7.67) может быть использована для определения коэффициентов $a_{j_{вн}}$ при редуцировании труб с показателем тонкостенности $\bar{T} < 0{,}10$. К сожалению, подобрать удовлетворительную форму аппроксимации графиков $a_{j_{вн}}$ в интервале $\bar{T} > 0{,}10$ не представляется возможным из-за сложного характера зависимостей. В этом интервале значений $\bar{T}$ необходимо использовать непосредственно расчетные данные для каждого конкретного случая.

Результаты расчета использованы для определения параметров формоизменения труб, редуцируемых по схеме круг—

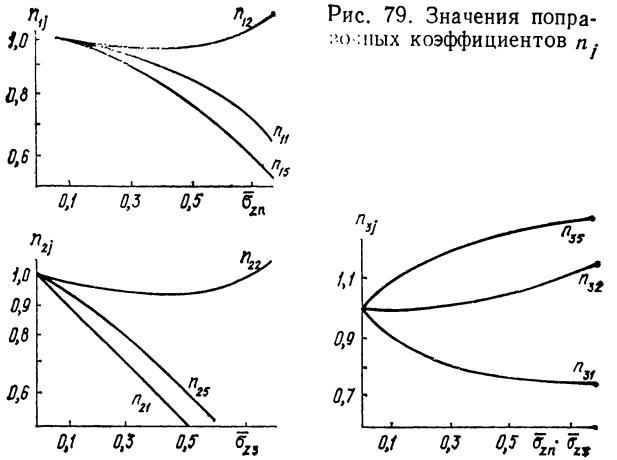

Рис. 79. Значения поправочных коэффициентов n_j

овал. На рис. 80 показаны расчетные и эмпирические [124] значения абсолютного изменения толщины стенки ΔS_a как функции угла Θ. Расчетное изменение толщины стенки определяли как $\Delta S_a = u_r|_{r=r_\text{н}} - u_r|_{r=r_\text{в}}$, что с учетом (7.55) после преобразований дает окончательное выражение

$$\Delta\bar{S}_2 = \varepsilon\left[\frac{\left(\frac{a_1}{3}+a_2-\frac{2}{\pi}\right)(1+a_5\sin^2\Theta)}{1+0{,}5a_5}+\frac{a_1\left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^2+a_2}{1-2\bar{T}}\right]. \quad (7.68)$$

Близкое совпадение расчетных и эмпирических данных позволяет использовать выражение (7.68) для определения частных изменений толщины стенки по клетям многоклетевого редукционного стана при деформации труб с показателем тонкостенности менее 0,1—0,12, так как в этом случае предварительная овализация в (к—1)-й клети заготовки, поступающей в к-ю клеть стана, практически не влияет на характер изменения толщины стенки.

При деформации более толстостенных труб ($\bar{T} > 0{,}12$) предварительная овализация сказывается на характере формоизменения. Для учета этого факта воспользуемся следующим методологическим приемом. В работе [126] показано, что используя в качестве ядра аналитическую математическую модель процесса и дополняя полученное решение эмпирическими поправочными функциями, можно анализировать весьма сложные условия пластического формоизменения. Поступим аналогичным образом и представим функцию истинного относительного изменения толщины стенки в виде

$$(\Delta\bar{S}_2)_\text{э} = \Delta\bar{S}_2 + \bar{\Delta}_1, \quad (7.69)$$

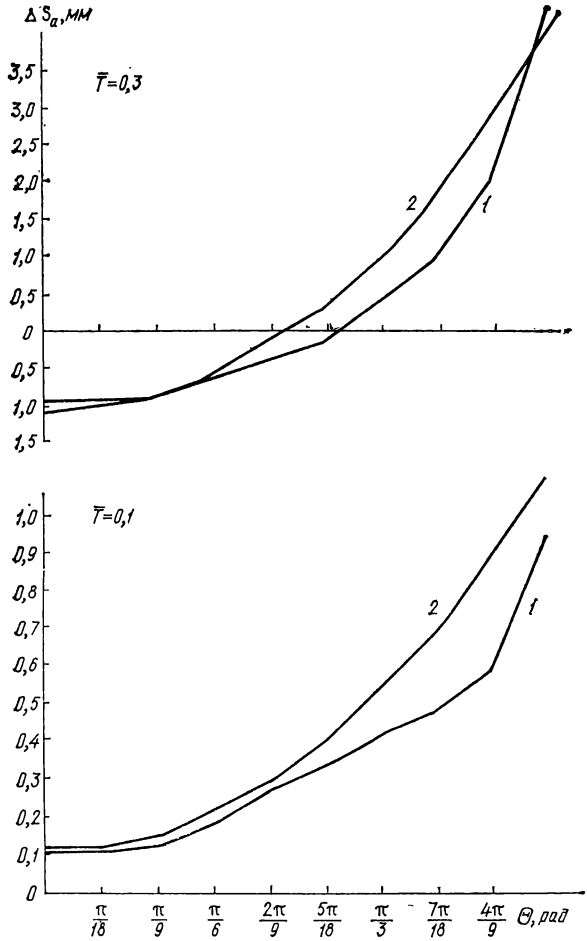

Рис. 80. Эмпирические (*1*) и расчетные (*2*) зависимости абсолютного изменения толщины стенки от ориентации относительно вершины калибра при редуцировании труб из углеродистой стали со средним относительным обжатием 12 %

где $\Delta\bar{S}_2$ — относительное изменение толщины стенки, определенное из уравнения (7.68) по условиям реализации математической модели для деформации по схеме круг—овал; $\bar{\Delta}_1$ — поправочная эмпирическая функция.

Используя эмпирические данные, Ю. Г. Гуляев и М. З. Володарский предложили следующую формулу для определения

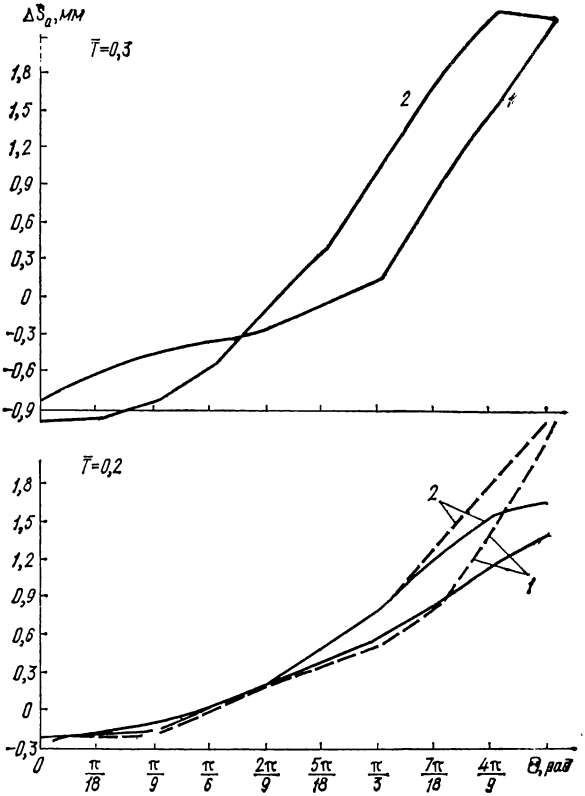

Рис. 81. Эмпирические (*1*) и расчетные (*2*) зависимости абсолютного изменения толщины стенки от ориентации относительно вершины калибра при прокатке предварительно овализованных (сплошные линии) и неовализованных (пунктир) труб из углеродистой стали:

$m_c = 12\ \%$; $\lambda_{к-1} = -1{,}11$; $\lambda_к = 1{,}21$

функции $\bar{\Delta}_1$, которая была получена с помощью алгоритма обработки случайных эмпирических величин (см. рис. 43):

$$\bar{\Delta}_1 = -[(69{,}2\varepsilon\Delta\lambda + 8{,}7)\,\bar{T} - 1]\,(\lambda_{к-1} - 1) \times \\ \times (1 + 11\varepsilon)\,1{,}06\varepsilon \left(\frac{2\Theta}{\pi}\right)^{10-\bar{T}}, \qquad (7.70)$$

где $\Delta\lambda$ — изменение овальности калибров между соседними клетями, $\Delta\lambda = \lambda_к - \lambda_{к-1}$; $\lambda_к$, $\lambda_{к-1}$ — овальность соответственно калибра, в котором осуществляется деформация, и предыдущего калибра.

На рис. 81 приведены эмпирические и расчетные данные об изменении стенки предварительно овализированных и неовализированных толстостенных труб из углеродистой стали. Близкое совпадение расчетных и эмпирических данных позволяет рекомендовать формулы (7.69), (7.70) для расчета изменения стенки при безоправочном редуцировании толстостенных труб.

3. Оптимизация процесса редуцирования

Выбор оптимальной схемы расположения оборудования. При редуцировании труб в многоклетевом стане происходит аддитивное накопление изменений толщины стенки исходной заготовки, в результате чего профиль готового изделия отличается от идеальной равностенной трубы. Решающее влияние на характер изменения толщины стенки по периметру прокатанной в редукционном стане трубы оказывает схема взаиморасположения разъемов калибров клетей. Из конструктивных соображений угол смещения разъемов калибров соседних клетей принимают кратным $\frac{\pi}{4}$. Далее будем характеризовать ориентацию двухвалкового калибра в пространстве углом $\beta_к$ $\left(0 \leqslant \beta_к < \frac{\pi}{2}\right)$ между вертикалью и выпуском калибра. Задача выбора оптимальной схемы расположения оборудования сводится к определению комплекса значений $\beta_к$ (здесь $\beta_к$ — угол, характеризующий расположение калибра к-й клети) на основании условия

$$\beta_к \Rightarrow \operatorname{arginf} [\Delta\bar{S}_K(\beta_к)], \qquad (7.71)$$

где $\Delta\bar{S}_K$ — относительная поперечная разностенность готовой трубы, $\Delta\bar{S}_K = \left(\frac{\Delta S}{\bar{S}}\right)_K$; ΔS — абсолютная поперечная разностенность, $\Delta S = S_{max} - S_{min}$; $\bar{S}$ — средняя толщина стенки.

Для решения поставленной задачи на стадии проектирования нового оборудования можно использовать метод перебора технически осуществимых альтернативных вариантов расположения клетей. При этом необходимо последовательно определить изменение толщины стенки по периметру трубы в каждой клети стана, изменение наводимой поперечной разностенности трубы по клетям и поперечную разностенность готовой трубы с последующим анализом и сравнением альтернативных вариантов для рассматриваемых станов.

Такой подход был использован в работе [127] при проектировании редукционного стана трубопрокатного агрегата

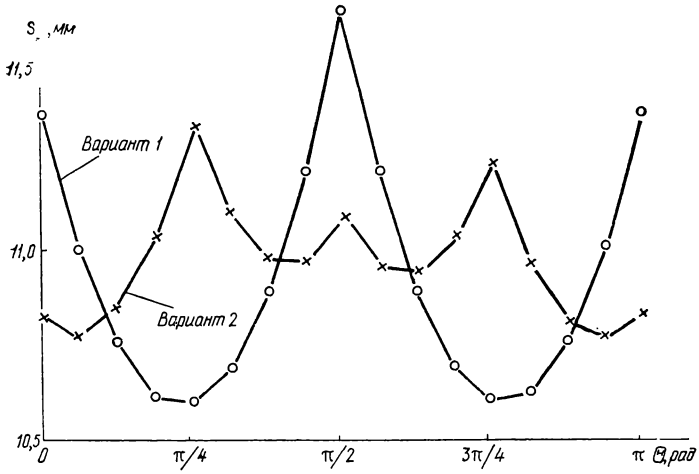

Рис. 82. Зависимость толщины стенки готовой трубы от ориентации образующей относительно вершины калибра первой клети стана

«170». Для определения параметров разностенности использовали методику, изложенную в § 2 гл. 7.

На рис. 82 показано расчетное изменение толщины стенки по периметру готовой трубы для двух альтернативных вариантов, параметры которых приведены в табл. 9. Очевидно, что вариант 2 более предпочтителен, чем вариант 1, так как относительная поперечная разностенность готовых труб для этих вариантов составляет соответственно 5,31 и 9,62 %.

Выбор оптимальных параметров деформации. Впервые идея определения оптимальных деформационных параметров процесса редуцирования труб на основании комплексной математической модели была реализована в работе [128]. При этом в качестве параметра оптимизации рассматривались энергосиловые характеристики процесса.

Рассмотрим методику выбора оптимальных деформационных параметров редуцирования на основании комплексной модели процесса, приведенной в § 1, 2 гл. 7 [129]. В качестве параметра оптимизации используем характеристику точности готовых труб $\Delta\bar{S}_K$. Исходно зададим следующие параметры процесса: расположение клетей, т. е. $\beta_к$ ($к = \overline{1, K}$), число клетей K, диаметр D_0 и стенка S_0 заготовки, диаметр D_K и средняя (номинальная) толщина стенки $\bar{S}_K \pm \Delta_K$ готовой трубы (здесь Δ_K — заданный допуск на величину $\bar{S}_K$),

Таблица 9. **Расчетные значения конечной разностенности редуцированных труб**

	Вариант 1					Вариант 2				
к	m_c, %	D, мм	Форма калибра	$\beta_к$	$\Delta\bar{S}_к$, %	m_c, %	D, мм	Форма калибра	$\beta_к$	$\Delta\bar{S}_к$, %
0	—	175,00	—	—	0	—	175,00	—	—	0
1	1,0	173,25	Овал	$\frac{\pi}{4}$	0,26	1,0	173,25	Овал	$\frac{3\pi}{4}$	0,26
2	4,5	165,45	»	$\frac{3\pi}{4}$	3,96	4,5	165,45	»	$\frac{\pi}{4}$	3,96
3	5,2	156,85	»	$\frac{\pi}{4}$	3,15	6,0	155,52	»	$\frac{3\pi}{4}$	4,39
4	5,2	148,69	»	$\frac{3\pi}{4}$	5,77	6,0	146,19	»	$\frac{\pi}{4}$	6,42
5	5,2	140,96	»	$\frac{\pi}{4}$	5,54	6,0	137,42	»	$\frac{3\pi}{4}$	7,16
6	5,2	133,63	»	$\frac{3\pi}{4}$	7,96	3,0	133,30	Круг	$\frac{\pi}{4}$	6,53
7	5,2	126,68	»	$\frac{\pi}{4}$	7,69	3,0	129,30	Овал	$\frac{\pi}{2}$	7,04
8	5,2	120,09	»	$\frac{3\pi}{4}$	9,92	6,0	121,54	»	0	6,59
9	2,6	116,95	»	$\frac{\pi}{4}$	9,43	3,6	117,14	»	$\frac{\pi}{2}$	5,09
10	1,0	115,76	»	$\frac{3\pi}{4}$	9,63	1,2	115,78	»	0	5,34
11	0,5	115,20	»	$\frac{\pi}{4}$	9,62	0,5	115,20	»	$\frac{\pi}{2}$	5,31
12	0	115,20	Круг	$\frac{3\pi}{4}$	9,62	0	115,20	Круг	0	5,31

суммарное редуцирование по диаметру в стане

$$x^0 = D_K - D_0 = \sum_{к=1}^{K} x_к, \qquad (7.72)$$

где $x_к$ — редуцирование в к-й клети, подлежащее определению по условиям оптимизации.

Режим распределения натяжений $\bar{Z}^{(т)}_{к\,m}$ по клетям стана задается в виде набора M альтернативных вариантов (здесь $m = \overline{1, M}$ — порядковый номер варианта), каждый из которых удовлетворяет условию

$$\bar{S}_K - \Delta_K \leqslant \bar{S}_0 + \sum_{к=1}^{K} \Delta S_к \leqslant \bar{S}_K + \Delta_K, \qquad (7.73)$$

где $\Delta S_к$ — абсолютное изменение средней толщины стенки при редуцировании с натяжением.

Для каждого m-го варианта необходимо определить оптимальное распределение x^0 между клетями стана, отвечающее граничному условию (7.72) и условию минимизации относительной поперечной разностенности готовой трубы

$$\Delta\bar{S}_K = \frac{(S_K)_{\max} - (S_K)_{\min}}{S_0 + \sum\limits_{к=1}^{K} \Delta S_к}. \qquad (7.74)$$

Рассчитывая изменение стенки заготовки вдоль C равномерно распределенных по периметру образующих, можно определить максимальное и минимальное значения величины

$$S_{Kc} = S_0 + \sum_{к=1}^{K} \Delta S_{кc}, \qquad (7.75)$$

где c — порядковый номер образующей, вдоль которой ведется расчет, $c = \overline{1,C}$; $\Delta S_{кc}$ — рассчитанное по формуле (7.68) абсолютное изменение толщины стенки в к-й клети на c-й образующей, определяющей значение угла Θ в (7.68), и тем самым определить значения $c = c^*$ и $c = c^{**}$, отвечающие соответственно условию максимума и минимума (7.75).

Таким образом, для m-го варианта расчета величина $\Delta\bar{S}_к$ является функцией распределения ресурса x^0 между клетями стана в соответствии с условием (индексы m опущены)

$$\Delta\bar{S}_K \Rightarrow \min_{x_к};$$
$$\sum_{к=1}^{K} x_к = x^0 \qquad (7.76)$$

и приведенными выше граничными условиями.

К оптимизационной задаче, формируемой условием (7.76), применим метод динамического программирования [130]. Введем определение функции цели. Пусть $f_i(x)$ — минимальное значение $\Delta\bar{S}_к$ за i шагов процесса в предположении, что суммарное обжатие за i шагов процесса равно x и что используется оптимальная стратегия $x_к$, т. е.

$$f_i(x) = \min_{x_i, \ldots, x_K} \sum_{к=i}^{K} g_к(x_к);$$
$$\sum_{к=i}^{K} x_к = x, \qquad (7.77)$$

где $g_к = \Delta S_к|_{c=c^*} - \Delta S_к|_{c=c^{**}}$.

В роли переменной состояния выступает величина x, в роли переменной управления — $x_к$. Согласно принципу оптимальности динамического программирования [130], запишем функциональное уравнение метода (размерности один)

$$i = \overline{1, K}$$

$$f_i(x) = \min_{x_i} [g_i(x_i) + f_{i-1}(x - x_i)]; \quad x \in \tilde{X}^*, \tag{7.78}$$

где $\tilde{X}^*$ — заданное множество состояний.

Учитывая, что рассматривается краевая задача, вводим условие

$$f_0(x) = g_0(x); \quad x \in \tilde{X}^*. \tag{7.79}$$

Заметим, что $x_к \in \tilde{X}^*$. Вычислительная процедура реализации сформулированной задачи построена на основании методики, предложенной в работе [131][1]. Анализ конечных результатов расчета позволяет выбрать оптимальный режим распределения натяжений по клетям стана (из числа альтернативных M вариантов) и соответствующий этому режиму оптимальный вариант распределения частных деформаций по клетям стана. Изложенная методика использована для расчета оптимальных деформационных режимов на редукционных станах действующих и проектируемых агрегатов.

Распределение частных деформаций. Общую деформацию распределяют между головной (одна — три клети), средней и калибрующей (одна — четыре клети) группами клетей. В любой из клетей средней группы деформация $m_с$ превышает значения $m_с$ в головной и калибрующей группах клетей. В средней группе клетей $m_с$ изменяют так, что в каждой четной клети стана $m_с < m_{ср}$ (здесь $m_{ср}$ — среднеарифметическое значение $m_с$ в средней группе клетей), а в каждой нечетной клети стана $m_с > m_{ср}$. В начале средней группы соотношение $m_с/m_{ср}$ составляет 0,96 — 0,98 в четных и 1,02—1,04 в нечетных клетях стана; указанное соотношение монотонно изменяется по ходу прокатки и последних четной и нечетной клетях средней группы составляет соответственно величины 0,85—0,94 и 1,06—1,17.

Режим натяжений. Стан условно делят на три группы клетей: в первой по ходу прокатки группе клетей величину натяжения увеличивают до максимального значения; во второй — натяжение поддерживают на постоянном уровне; в третьей — натяжение уменьшают до минимального значения.

[1] Программа реализации задачи составлена В. А. Бараненко и Ю. Г. Гуляевым.

Натяжение в межклетевых промежутках первой и третьей групп клетей изменяют так, что коэффициент пластического натяжения $\bar{Z}^{(\tau)}$ изменяется по степенному закону в соответствии с зависимостями

$$[Z^{(\tau)}]^{\mathrm{I}}_{n_\pi} = Z^{(\tau)}_{\mathrm{H}} + \frac{5}{3}[\Delta\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{I}}\left(\frac{n_\pi}{M_1}\right)^2\left[1 - 0{,}4\left(\frac{n_\pi}{M_1}\right)^3\right]; \quad (7.80)$$

$$[Z^{(\tau)}]^{\mathrm{III}}_{n_\pi} = Z^{(\tau)}_{K} + 5\,[\Delta\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{III}}\left(\frac{K - n_\pi}{K - M_2}\right)\left[1{,}2 - \left(\frac{K - n_\pi}{K - M_2}\right)^{0{,}2}\right], \quad (7.81)$$

где $[\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{I}}_{n_\pi}$, $[\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{III}}_{n_\pi}$ — текущие значения коэффициентов пластического натяжения в межклетевых промежутках соответственно первой ($n_\pi = \overline{0, M_1 - 1}$, $\kappa = \overline{1, M_1}$) и третьей ($n_\pi = \overline{M_2, K}$, $\kappa = \overline{M_2, K}$) группах клетей; $n_\pi = \overline{0, K}$ — индекс, соответствующий порядковому по ходу прокатки номеру межклетевого промежутка, считая «нулевым» промежутком ($n_\pi = 0$) входную сторону первой клети стана ($\kappa = 1$) и K-м межклетевым промежутком ($n_\pi = K$) выходную сторону последней клети стана ($\kappa = K$); $\bar{Z}^{(\tau)}_0$, $\bar{Z}^{(\tau)}_K$ — коэффициенты пластического натяжения соответственно на входе в первую клеть стана и на выходе из последней клети стана; $[\Delta Z^{(\tau)}]^{\mathrm{I}}$, $[\Delta\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{III}}$ — изменения коэффициентов пластического натяжения соответственно в первой и третьей группах клетей, $[\Delta\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{I}} = [\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{II}} - \bar{Z}^{(\tau)}_0$, $[\Delta\bar{Z}^{(\tau)}_0]^{\mathrm{III}} = [\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{II}} - \bar{Z}^{(\tau)}_K$; $[\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{II}}$ — коэффициент пластического натяжения в межклетевых промежутках второй группы клетей ($n_\pi = \overline{M_1, M_2 - 1}$, $\kappa = M_1, M_2$); M_1, M_2 — порядковые номера соответственно первой и последней клети второй группы клетей.

При гранично заданных размерах и общей деформации заготовки по диаметру δ_Σ величина $[\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{II}}$ должна обеспечивать получение необходимой толщины стенки готовой трубы. Реально имеют место следующие значения величин: $[\Delta Z^{(\tau)}]^{\mathrm{I}} = [\Delta\bar{Z}^{(\tau)}]^{\mathrm{III}} = 0{,}1 \div 0{,}7$; $\bar{Z}^{(\tau)}_0 = \bar{Z}^{(\tau)}_K = 0$; $M_1 = (0{,}4 \div 0{,}6)K$; $M_2 = (0{,}5 \div 0{,}8)K$, причем $M_1 < M_2$ (при $M_1 = M_2$ вторая группа клетей отсутствует).

В качестве примера использования приведенных рекомендаций рассмотрим возможную коррекцию существующего режима прокатки в холодном состоянии заготовки $13{,}0 \times 0{,}65$ мм с общей деформацией по диаметру $\delta_\Sigma = 46{,}92\%$. Значения коэффициентов a_j (j равно 1; 2; 5) для этого случая можно определять по аппроксимирующим зависимостям

$$a_1 = (6{,}6\bar{T} + 0{,}9m_c - 90\bar{T}m_c - 0{,}01)(0{,}8 - 0{,}32\bar{\sigma}_{z1}) \times \times (1 - \bar{\sigma}_{z3})(1 - 0{,}45\bar{\sigma}_{z1}\bar{\sigma}_{z3}); \quad (7.82)$$

$$a_2 = (0{,}57 - 3{,}2\bar{T} - m_c + 10m_c\bar{T})(0{,}8 + 0{,}08\bar{\sigma}_{z1}\bar{\sigma}_{z3}); \quad (7.83)$$

$$a_5 = 0{,}4\bar{T} + 1{,}5m_c + 10m_c\bar{T})(0{,}46\bar{\sigma}_{z1} - 0{,}8)(1 - 86\bar{\sigma}_{z3}) \times \times (1 + 0{,}57\bar{\sigma}_{z1}\bar{\sigma}_{z3}). \quad (7.84)$$

Зависимости (7.82)—(7.84) аппроксимируют расчетные значения с ошибкой, не превышающей 10% при $m_c \leqslant 0{,}045$; $\bar{T} \leqslant 0{,}12$; $\bar{\sigma}_{z1} \leqslant 0{,}7$; $\bar{\sigma}_{z3} \leqslant 0{,}7$.

Как следует из приведенных в табл. 10 данных, режим деформации, построенный с использованием разработанных рекомендаций, позволяет снизить уровень поперечной разностенности готовых труб) (при $\beta_к = \frac{\pi}{4}$ и $\beta_к = \frac{3\pi}{4}$ для нечетных и четных клетей стана).

Таблица 10. Расчетные значения поперечной разностенности

к	$n_п$	Вариант настройки стана								
		А			Б			В		
		m_c, %	$\bar{Z}^{(т)}$	$\Delta S_к$, %	m_c, %	$\bar{Z}^{(т)}$	$\Delta S_к$, %	m_c, %	$\bar{Z}^{(т)}$	$\Delta \bar{S}_к$, %
1	0	2,08[1]	0	0	2,08[1]	0	0	1,51[1]	0	0
2	1	4,40	0	1,23	4,40	0,012	1,22	2,50[1]	0,012	0,85
3	2	4,35	0,005	2,36	4,35	0,049	2,27	4,41	0,049	0,98
4	3	4,30	0,022	2,51	4,30	0,109	2,31	4,23	0,109	2,80
5	4	4,31	0,048	3,70	4,31	0,191	3,30	4,45	0,191	2,11
6	5	4,17	0,088	3,91	4,17	0,287	3,33	4,16	0,287	3,76
7	6	4,11	0,146	4,85	4,11	0,392	4,00	4,48	0,392	3,07
8	7	4,08	0,228	5,02	4,08	0,491	3,93	4,09	0,491	4,38
9	8	4,04	0,340	5,78	4,04	0,568	4,46	4,52	0,568	3,97
10	9	4,05	0,474	5,70	4,05	0,600	4,32	4,03	0,600	4,79
11	10	3,93	0,555	6,26	3,93	0,600	4,88	4,55	0,600	4,52
12	11	3,91	0,601	6,13	3,91	0,592	4,78	3,96	0,592	5,37
13	12	3,82	0,622	6,69	3,82	0,566	5,41	4,59	0,566	5,08
14	13	3,84	0,620	6,59	3,84	0,519	5,36	3,89	0,519	6,12
15	14	3,72[2]	0,590	7,22	3,72[2]	0,450	6,16	3,62[2]	0,450	5,74
16	15	2,04[2]	0,533	7,18	2,04[2]	0,350	6,28	3,06[2]	0,350	6,99
17	16	0,93[2]	0,345	7,56	0,93[2]	0,212	6,66	0	0	6,40
—	17	—	0	7,44	—	0	6,53	—	0	6,40

Примечания. Значения приведены для исходной (А), скорректированной по режимам натяжений (Б), а также натяжений и распределению частных деформаций (В) настроек стана; индексы 1, 2 — соответственно значения для клетей головной и калибрующей групп.

Деформация сварных труб из низкоуглеродистых сталей. Целесообразно распределить суммарную деформацию заготовки δ_{Σ} между редукционным станом $\delta_{\Sigma р}$ и трубоволочильным агрегатом $\delta_{\Sigma в}$ в соответствии с зависимостью

$$\frac{\delta_{\Sigma р}}{\delta_{\Sigma в}} = (0{,}325 + \bar{T})(1 - \delta_{\Sigma р})\{4 \pm 0{,}5\,[0{,}3 - \delta_{\Sigma}(У_{\%} + 0{,}25)]\}, \quad (7.85)$$

где $У_{\%}$ — процентное содержание углерода в деформируемой стали.

Экспериментальные исследования, выполненные в промышленных условиях, показали, что при использовании режима деформации, описываемого выражением (6), исходную заготовку можно деформировать на величину до $\delta_{\Sigma} = 60\%$ без опасности образования дефектов на внутренней поверхности готовых труб.

Глава восьмая

ТАНГЕНЦИАЛЬНАЯ ОБКАТКА ТРУБ

1. АММ определения усилий деформации

Эффективным способом получения осесимметричных изделий из трубчатых заготовок является обкатка инструментом трения, когда усилие деформирования передается металлу в процессе скольжения его относительно инструмента [132]. Для обкатки используют ролики или инструмент трения при соответствующей его калибровке. Обкатку применяют для изготовления бесшовных газовых баллонов, диффузоров и других трубчатых деталей переменного диаметра. Схема процесса тангенциальной обкатки следующая: трубчатой заготовке сообщается вращательное движение; участок, подлежащий деформации, нагревается; одновременно инструмент поступательно перемещается перпендикулярно оси заготовки, деформируя ее до заданного размера.

Процесс тангенциальной обкатки более технологичен, так как за счет принудительного вращения заготовки обеспечивает высокую дробность деформации. Особенность деформации при обкатке — это то, что усилия, прикладываемые инструментом к заготовке, уравновешиваются не в очаге деформации, а во всей заготовке, передающей крутящий момент от привода в зону контакта заготовки с инструментом. Эта особенность обкатки обусловливает внутреннее противоречие процесса: степень деформации определяется усилиями инструмента, прикладываемыми к заготовке, а величина усилий ограничивается несущей способностью заготовки. В связи с этим главными вопросами обеспечения устойчивого процесса обкатки, и особенно тонкостенных труб, является определение силовых условий и устойчивости формы заготовки при обкатке.

В настоящем исследовании предпринята попытка построения модели силового взаимодействия тонкостенной заготовки с инструментом трения. На рис. 83 приведена принятая в решении схема деформации. Для обеспечения неразрывности полей напряжений и скоростей перемещений вдоль оси x принято, что деформация редуцирования распределена по всей длине зоны контакта заготовки с инструментом. Принята схема плоской деформации, что отвечает экспериментальным

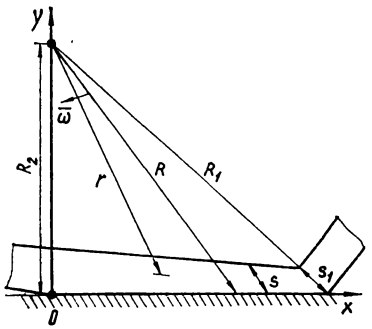

Рис. 83. Схема тангенциальной обкатки труб

данным при обкатке тонкостенных заготовок. Кривизна инструмента в зоне контакта с заготовкой принята равной нулю. Используем систему уравнений в напряжениях и скоростях перемещений в прямоугольных координатах [133]:

уравнение равновесия по оси y

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (8.1)$$

условие пластичности

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2; \quad (8.2)$$

уравнение связи напряжений со скоростями деформаций

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} = \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}}; \quad (8.3)$$

условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (8.4)$$

Здесь v_x, v_y — составляющие скорости перемещения металла по осям x и y соответственно.

В качестве граничных могут быть заданы либо силовые условия на контуре, ограничивающем зону контакта, — нормальные и касательные напряжения, либо скорости перемещения на том же контуре, либо смешанные условия. Силовые граничные условия в сечениях входа и выхода из зоны контакта не определены.

Для получения замкнутого решения системы уравнений плоской деформации зададим кинематически возможную функцию скорости перемещения v_x по методу Фурье [134] — в виде произведения двух независимых функций от координат, — удовлетворяющую кинематическим граничным условиям [4].

При наличии скольжения металла по инструменту вдоль всей зоны контакта v_x определяется тангенциальной скоростью вращающейся заготовки, которая при постоянной угловой скорости вращения заготовки $\bar{\omega}$ определяется только уменьшением ее радиуса R. Изменение радиуса заготовки вдоль

зоны контакта выражается через координату x и конечный радиус заготовки R_2 после обжатия (см. рис. 83):

$$R = \sqrt{R_2^2 + x^2}. \tag{8.5}$$

Для определения функции скорости v_x необходимо задать ее зависимость от координаты y. Используем для этого приближенный метод Т. Кармана [135], применяемый для определения характеристик пограничного слоя на плоской поверхности. Распределение скорости перемещения по толщине стенки задается в виде полинома с числом постоянных, определяемых количеством граничных условий. Удовлетворяясь двумя условиями на свободной и контактной поверхностях заготовки, выбираем полином с двумя неопределенными коэффициентами. Тогда составляющая скорости перемещения может быть представлена в виде

$$v_x = \bar{\omega} R (ay + b). \tag{8.6}$$

На поверхности контакта инструмента с заготовкой $y = 0$, $v_x = \bar{\omega} R$. Отсюда из (8.6) $b = 1$.

На внутренней поверхности заготовки при $y = s$, $v_x = \bar{\omega}(R - s)$ из (8.6) получим

$$\bar{\omega}(R - s) = \bar{\omega} R (as + 1),$$

$$a = -\frac{1}{R}.$$

С определенными коэффициентами функция v_x имеет вид

$$v_x = \bar{\omega}(\sqrt{R_2^2 + x^2} - y). \tag{8.7}$$

Производные скорости v_x по координатам

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\bar{\omega} x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\bar{\omega}. \tag{8.8}$$

Закон изменения толщины стенки заготовки вдоль зоны контакта найдем из принятых допущений и условия постоянства секундных объемов, проходящих через произвольное меридиональное сечение очага деформации:

$$\int_{R_1 - s_1}^{R_1} \bar{\omega} r \, dr = \int_{R-s}^{R} \bar{\omega} r \, dr = \text{const},$$

где s_1, R_1 — толщина стенки и радиус заготовки в сечении входа в зону контакта; s — текущая толщина стенки.

Из принятого ранее условия $\bar{\omega} = \text{const}$ имеем

$$R_1^2 - (R_1 - s_1)^2 = R^2 - (R - s)^2;$$

$$s^2 - 2Rs + 2R_1 s_1 - s_1^2 = 0.$$

Пренебрегая квадратами малых (s_1 и s), получаем упрощенную зависимость

$$s = s_1 \frac{R_1}{R}. \tag{8.9}$$

Используя условие (8.4) и производную v_x по x из (8.8), записываем

$$\frac{\bar{\omega} x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Отсюда производная радиальной составляющей скорости v по y

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\bar{\omega} x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}}. \tag{8.10}$$

Найдем производную v_y по x:

$$v_y = -\frac{\bar{\omega} x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} y + C;$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -y \frac{\bar{\omega} R_2^2}{(R_2^2 + x^2)^{1,5}}. \tag{8.11}$$

Подставим производные скоростей по координатам (8.8), (8.10) и (8.11) в (8.3):

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} = -\frac{2x(R_2^2 + x^2)}{(R_2^2 + x^2)^{1,5} + yR_2^2}. \tag{8.12}$$

Возведя (8.12) в квадрат и подставляя в (8.2), получаем

$$\tau_{xy} = \pm k \sqrt{\frac{[(R_2^2 + x^2)^{1,5} + yR_2^2]^2}{[(R_2^2 + x^2)^{1,5} + yR_2^2]^2 + 4x^2 (R_2^2 + x^2)^2}}. \tag{8.13}$$

Обозначим $R_2^2 + x^2 = \gamma_1$ и продифференцируем (8.13) по x

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \pm \frac{k}{2} \sqrt{\frac{4x^2\gamma_1^2 + (\gamma_1^{1,5} + yR_2^2)^2}{(\gamma_1^{1,5} + yR_2^2)^2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(3\gamma_1^2\gamma_1' + 3yR_2^2\gamma_1^{0,5}\gamma_1')[4x^2\gamma_1^2 + (\gamma_1^{1,5} + yR_2^2)^2]}{[4x^2\gamma_1^2 + (\gamma_1^{1,5} + yR_2^2)^2]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{[4(2x\gamma_1^2 + 2x^2\gamma_1\gamma_1') + 3\gamma_1^2\gamma_1' + 3yR_2^2\gamma_1^{0,5}\gamma_1'](\gamma_1^{1,5} + yR_2^2)^2}{[4x^2R_2^2 + (\gamma_1^{1,5} + yR_2^2)^2]^2} \right\}. \tag{8.14}$$

Для выражения из (8.14) переменной y введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} a &= \gamma_1^{1,5} = (R_2^2 + x^2)^{1,5}; \\ b &= R_2^2; \\ c &= 2x\gamma_1 = 2x\,(R_2^2 + x^2); \\ d &= 3\gamma_1^2\gamma_1' = 6x\,(R_2^2 + x^2)^2; \\ e' &= 3R_2^2\gamma_1^{0,5}\gamma_1' = 6R_2^2 x\sqrt{R_2^2 + x^2}; \\ m' &= 4\,(2x\gamma_1^2 + 2x\gamma_1\gamma_1') + 3\gamma_1^2\gamma_1' = 2x\,(R_2^2 + x^2) \times \\ &\quad \times [7\,(R_2^2 + x^2) + 8x^2]. \end{aligned}\right\} \quad (8.15)$$

Тогда

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \pm \frac{k}{2} \sqrt{\frac{(a+by)^2+c^2}{(a+by)^2}} \left\{ \frac{d+e'y}{(a+by)^2+c^2} - \frac{(m'+e'y)\,(a+by)^2}{[(a+by)^2+c^2]^2} \right\}. \quad (8.16)$$

Решая совместно (8.1) и (8.16)

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \pm \frac{k}{2} \left\{ \frac{d+e'y}{(a+by)\sqrt{(a+by)^2+c^2}} - \frac{(m'+e'y)\,(a+by)^2}{[(a+by)^2+c^2]^{1,5}} \right\} \quad (8.17)$$

и после упрощающей подстановки $(a + by) = \xi_x$, получаем

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial \xi_x} = \pm \frac{k}{2} \left[\frac{d + a\frac{e'}{b}}{\xi_x b \sqrt{\xi_x^2 + c^2}} + \frac{e}{b^2 \sqrt{\xi_x^2 + c^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\xi_x \left(m' - a\frac{e'}{b}\right)}{b\,(\xi_x^2 + c^2)^{1,5}} - \frac{e}{b^2} \frac{\xi_x^2}{(\xi_x^2 + c^2)^{1,5}} \right].$$

Замечая, что $d = a\frac{e'}{b}$, после интегрирования имеем

$$\sigma_y = -\frac{k}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi_x^2 + c^2}} \left(\frac{m' - a\frac{e'}{b}}{b} - \frac{e'\xi_x}{b^2} \right) + C.$$

После обратной подстановки $\xi_x = a + by$ запишем

$$\sigma_y = -\frac{k}{2b} \frac{m' + e'y}{\sqrt{(a+by)^2 + c^2}} + C. \quad (8.18)$$

Постоянную C найдем из условия равенства нулю радиальных напряжений на внутренней поверхности заготовки $\sigma_{y=s} = 0$:

$$C = \frac{k}{2b} \frac{m' + e's}{\sqrt{(a+bs)^2 + c^2}}. \quad (8.19)$$

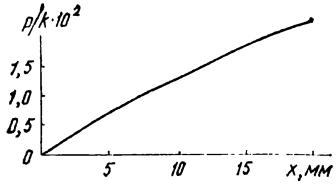

Рис. 84. Распределение нормальных контактных давлений по ширине зоны контакта

При $y = 0$ из (8.18) с учетом (8.9) и (8.15), (8.19) получим выражение для нормального контактного давления

$$p = \frac{k}{2R_2^2} \times \times \left(\frac{14x\gamma_1^2 + 16x^3\gamma_1 + 6R_2^2 x\gamma_1^{0,5} s}{\sqrt{(\gamma_1^{1,5} + R_2^2 s)^2 + 4x^2\gamma_1^2}} - \frac{14x\gamma_1 + 16x^2}{\sqrt{\gamma_1 + 4x^2}} \right). \quad (8.20)$$

График распределения удельных контактных давлений по ширине зоны контакта (функция (8.20)) показан на рис. 84.

Для определения полного давления металла на инструмент необходимо проинтегрировать функцию (8.20) по площади зоны контакта

$$P = \iint\limits_{(F)} p dF. \quad (8.21)$$

Площадь контактной поверхности имеет простую форму, поэтому двойной интеграл (8.21) представим в виде двухкратного.

При постоянной по всей зоне контакта величине частных обжатий $\bar{\delta}_2$, область интегрирования ограничена непрерывной кривой $B = f(z)$ и двумя прямыми $z = 0$ и $z = l_д$. Функция ширины контактной поверхности B определяет изменение ширины контактной поверхности по длине зоны контакта и может быть найдена из выражения

$$B = \frac{D}{K_э s} \sqrt{\bar{\delta}_2 D}, \quad (8.22)$$

где D — диаметр заготовки; $K_э$ — эмпирический коэффициент, зависящий от тонкостенности заготовки.

Переменным по z является конечный радиус $R_2 = R_1 - z\operatorname{tg}\alpha_ф$, где $\alpha_ф$ — угол наклона формирующей плоскости инструмента.

Подставляя в двойной интеграл пределы интегрирования, получаем

$$P = \int\limits_0^{l_д} dz \int\limits_0^{f(z)} p dx = \int\limits_0^{l_д} p_z dz.$$

Значения p_z могут быть найдены по формулам квадратур

$$p_z = \int\limits_0^{f(z)} p(x, z)\, dx = \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij}\, p(x_i, z_j).$$

В свою очередь, полное давление определится по квадратурной формуле

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} p(x_i, z_j). \qquad (8.23)$$

Разработанная методика использована для расчетов энергосиловых параметров проектируемого обкатного оборудования. Сравнение расчетов с экспериментальными замерами показало превышение расчетных значений на 3—7 %.

2. Условие устойчивости формы заготовки при обкатке

Устойчивый процесс деформации, т. е. ее протекание в нужном направлении,— необходимое условие любого способа ОМД. При прокатке — это условия захвата, а при формоизменении тонкостенных трубчатых и листовых заготовок — условия изменения их формы, соответствующие требованиям формоизменения.

Искажения формы, не соответствующие требованиям формоизменения (гофры, складки, разрывы и др.), ограничивают возможности процесса обкатки. Существенная особенность потери устойчивости при обкатке — это то, что она происходит при развитии в металле пластических деформаций, т. е. имеет место пластическая потеря устойчивости.

Наиболее общим подходом к устойчивости нагруженного равновесия является энергетический подход, основанный на исследовании изменения полной потенциальной энергии системы. Геометрической особенностью оболочек является то, что при закреплении краев они не допускают изгибных деформаций без деформации срединной поверхности. Это приводит к тому, что формулы для критических нагрузок оболочек имеют вообще сложную структуру по сравнению с формулами для стержней и пластин. Кроме того, для закрепленных оболочек в окрестности точки бифуркации, соответствующей неустойчивому начальному состоянию равновесия, нет новых устойчивых состояний равновесия — они удалены на конечные расстояния.

Классически система считается устойчивой, если при любом, сколько угодно малом отклонении от положения равновесия, система возвращается в исходное состояние. Однако при этом нет ответа на вопрос: вернется ли система в исходное положение, если отклонение будет конечным, большим.

В реальных условиях вопрос устойчивости должен непрерывно решаться с учетом внешних конечных возмущений: начальных неправильностей оболочки, случайных толчков и так

далее. В связи с этим переход к новой форме равновесия происходит при большей или меньшей силе, что экспериментально выражается в разбросе значений критической силы.

Для определения устойчивости в большом необходимо, чтобы характер конечного возмущения был задан, что невозможно в связи с его случайным характером. Таким образом, исследованы на устойчивость могут быть только определенные формы равновесия, т. е. конкретные состояния систем.

Указанные особенности устойчивости оболочек приводили большинство исследователей процессов формоизменения тонкостенных заготовок к необходимости либо значительно упрощать постановку задачи [136, 137, 138], либо отказываться от аналитического определения условий устойчивости и находить их экспериментально [139, 140].

Анализ подходов к решению задачи устойчивости процессов формообразования и их результаты позволяют заключить, что точное решение задачи устойчивости оболочки при пластических деформациях ее срединной поверхности трудоемко, а экспериментальные данные имеют широкий разброс; решение задачи в упрощенных постановках, рассматривающих упругую устойчивость стержня или пластины, может быть использовано как первое приближение.

Необходимым условием редуцирования, как уже выяснено, является наличие сжимающих наружных напряжений. Характер потери устойчивости при обкатке одним инструментом трения может быть различен, однако он всегда связан с выпучиванием заготовки внутрь от сжимающих напряжений. Здесь решается задача определения условий устойчивости при обкатке тонкостенных заготовок с использованием подхода, изложенного в работах [110, 141].

Рассмотрим участок тонколистового материала — участок контактной поверхности трубы, выпучивающийся под действием сжимающих напряжений. Расположим участок заготовки на контактной поверхности с инструментом в прямоугольной системе координат (рис. 85) так, чтобы ее срединная плоскость совпадала с координатной полоскостью xz. Отметим, что рассматривается устойчивость торцевого участка заготовки как наиболее склонная к потере устойчивости.

Будем полагать [134, 142] следующее:

1) до нагружения участок заготовки идеально плоский и равнодействующие внешних нагрузок действуют в его срединной плоскости;

2) докритическое напряженное состояние описывается соотношениями теории пластичности для жестко-пластического линейно-упрочняемого тела: $\sigma_i = \sigma_т + b_1\varepsilon_i$;

3) внешние нагрузки не изменяются при деформациях;

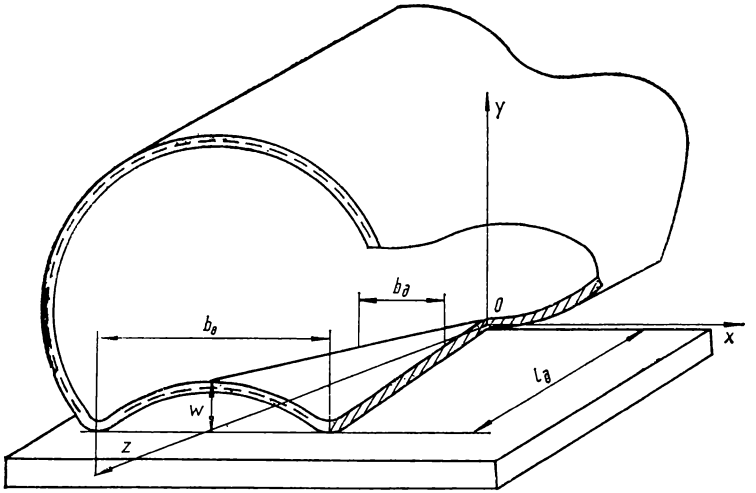

Рис. 85. Схема потери устойчивости концевого участка заготовки

4) изгиб участка описывается с помощью обычных гипотез о неискривляемости нормали к срединной плоскости и малости нормальных напряжений в плоскостях, перпендикулярных к срединной.

Исходное напряженное состояние участка заготовки из условия отсутствия инструмента, подпирающего заготовку изнутри (оправки), можно принять двухосным: $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_z \neq 0$, $\sigma_y = 0$. Деформированное состояние из-за значительной протяженности участка заготовки вдоль оси z и на основании экспериментов можно считать плоским: $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y \neq 0$, $\varepsilon_z = 0$.

При описанном напряженно-деформированном состоянии имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{2}\sigma_x; \\ \sigma_i &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_x; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y; \\ \varepsilon_i &= \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_x. \end{aligned}\right\} \qquad (8.24)$$

Относительная деформация по оси x — ε_x в пределах одного цикла обжатия — одного оборота:

$$\varepsilon_x = \frac{R\bar{\varphi} - R\sin\bar{\varphi}}{R\bar{\varphi}},$$

где угол $\bar{\varphi}$ определяется величиной обжатия за оборот заготовки $\bar{\delta}_\Sigma$: $\cos\bar{\varphi} = 1 - \frac{\bar{\delta}_\Sigma}{\bar{R}}$. Тогда ε_x выражается через геометрические характеристики:

$$\varepsilon_x = 1 - \frac{\sqrt{2\bar{\delta}_\Sigma \bar{R} - \bar{\delta}_\Sigma^2}}{\arccos\left(1 - \frac{\bar{\delta}_\Sigma}{\bar{R}}\right)}. \qquad (8.25)$$

Пусть в результате каких-либо возмущений срединная поверхность заготовки получает прогиб $\bar{w}$. В силу первого допущения всегда возможно плоское состояние равновесия. Для определения точек бифуркации будем рассматривать искривленное изгибное состояние равновесия, бесконечно близкое к исходному. При этом функция прогиба будет иметь вид

$$w = A\bar{w}_1(x, z), \qquad (8.26)$$

где A — бесконечно малый параметр, не зависящий от координат; $\bar{w}_1$ — конечная функция координат.

Функция $\bar{w}_1$ должна отвечать граничным условиям и требованию полноты [142]. Используя систему тригонометрических функций, полнота которой доказана [26], и одновременно удовлетворяя граничным условиям, задаем функцию $\bar{w}_1$ в виде

$$\bar{w}_1 = \sin\frac{\pi z}{l_д}\left(\cos\frac{\pi x}{b_д} + 1\right).$$

Поперечные прогибы w вызывают изменения кривизны срединной плоскости заготовки, определяемые формулами

$$K_x = \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}; \quad K_z = \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2}. \qquad (8.27)$$

Кроме, того, срединная плоскость испытывает удлинения, пропорциональные квадратам производных поперечного прогиба w:

$$\varepsilon_x' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)^2; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)^2. \qquad (8.28)$$

Дифференцируя выбранную функцию прогиба $\bar{w}$ (8.26), находим деформации и кривизны по формулам (8.27) и (8.28):

$$
\left.
\begin{aligned}
K_x &= \frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial x^2} = -A\sin\frac{\pi z}{l_д}\cos\frac{\pi x}{b_д}\frac{\pi^2}{b_д^2};\\
K_z &= \frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial z^2} = -A\sin\frac{\pi z}{l_д}\left(\cos\frac{\pi x}{b_д}+1\right)\frac{\pi^2}{l_д^2};\\
\varepsilon_x' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}A^2\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\sin^2\frac{\pi x}{b_д}\frac{\pi^2}{b_д^2};\\
\varepsilon_z' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}A^2\cos^2\frac{\pi z}{l_д}\left(\cos\frac{\pi x}{b_д}+1\right)^2\frac{\pi^2}{l_д^2}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (8.29)
$$

При выпучивании внутренние силы совершают работу изгиба $\bar{V} = \iint W dxdz$, где W — потенциал моментов, и работу деформации срединной поверхности $\bar{V}_1$.

Согласно вариационному принципу Лагранжа, работа внутренних сил на возможных перемещениях частиц тела (срединной плоскости) равна работе внешних сил на перемещениях контура, соответствующих этим деформациям: $\bar{V}_1 = A_1$. Кроме работы A_1 контурные (внешние) силы совершают работу А на перемещениях точек контура в плоскости $\bar{X}\bar{Z}$ за счет выпучивания

$$
A = -\frac{s}{2}A' = -\frac{s}{2}\iint_F (\sigma_x\varepsilon_x' + \sigma_z\varepsilon_z')\,dxdz.
$$

Если работа внутренних сил $\bar{V} + \bar{V}_1$ больше работы внешних $A + A_1$, то плоское состояние является устойчивым, если меньше — неустойчивым. Таким образом, критическое значение внешних сил определится равенством этих работ, а так как $\bar{V}_1 = A_1$, то $\bar{V} = A$, или $\bar{V} - A = 0$,

$$
\iint_F \left[W + \frac{s}{2}(\sigma_x\varepsilon_x' + \sigma_z\varepsilon_z')\right]dF = 0. \qquad (8.30)
$$

Потенциал моментов W определим по формуле [143]:

$$
W = M_xK_x + M_zK_z. \qquad (8.31)
$$

Деформируемый участок заготовки находится в пластическом состоянии, поэтому удлинения срединной поверхности ε_x' и ε_z', вызванные изгибом, будут связаны с приращениями напряжений от изгибающих моментов σ_x' и σ_z' соотношениями, справедливыми для плоского напряженного состояния:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x' - \frac{1}{2}\sigma_z &= \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\varepsilon_x' - yK_x);\\
\sigma_z' - \frac{1}{2}\sigma_x &= \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\varepsilon_z - yK_z).
\end{aligned}
\right\} \qquad (8.32)
$$

Решая систему (8.32), находим

$$\sigma_x' = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left[2(\varepsilon_x' - yK_x) + (\varepsilon_z' - yK_z)\right];$$

$$\sigma_z' = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left[2(\varepsilon_z' - yK_z) + (\varepsilon_x' - yK_x)\right].$$

Тогда изгибающие моменты запишем в виде

$$M_x = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_x' y dy = -\frac{s^3}{18}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(2K_x + K_z);$$

$$M_z = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_z' y dy = -\frac{s^3}{18}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(2K_z + K_x). \tag{8.33}$$

С учетом (8.31) и (8.33) выражение (8.30) имеет вид

$$\iint_{(F)} \left\{-\frac{s^3}{18}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(2K_x^2 + 2K_xK_z + 2K_z^2) + \frac{s}{2}(\sigma_x\varepsilon_x' + \sigma_z\varepsilon_z')\right\} dF = 0. \tag{8.34}$$

Выразим деформации и кривизны через функцию прогиба w:

$$\iint_{(F)} \left\{-\frac{s^3}{9}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left[A^2 \sin^2\frac{\pi z}{l_д}\cos^2\frac{\pi x}{b_д}\frac{\pi^4}{b^4} + A^2\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\left(\cos\frac{\pi x}{b_д} + 1\right)^2 \times \right.\right.$$

$$\times \frac{\pi^2}{l_д^2} + A^2\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\cos\frac{\pi x}{b_д}\left(\cos\frac{\pi x}{b_д} + 1\right)\frac{\pi^4}{l_д^2 b_д^2}\Big] +$$

$$+ \frac{s}{2}\sigma_i\left[\frac{1}{2}A^2\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\sin^2\frac{\pi x}{b_д}\frac{\pi^2}{b_д^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4}A^2\cos^2\frac{\pi z}{l_д}\left(\cos\frac{\pi x}{b_д} + 1\right)^2\frac{\pi^2}{l_д^2}\right]\right\} dF = A^2\bar{\Phi} = 0. \tag{8.35}$$

Условие (8.35), очевидно, удовлетворяется при $A = 0$ т. е. в безизгибном состоянии. Другое положение равновесия определим из условия

$$\Phi = 0. \tag{8.36}$$

Контур интегрируемой области имеет простую форму, поэтому двойной интеграл (8.35) можно заменить двухкратным

$$\bar{\Phi} = \int_0^{l_д} dz \int_{-0{,}5b_д}^{0{,}5b_д} \left\{-\frac{s^2}{9\varepsilon_i}\left[\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\cos^2\frac{\pi x}{b_д}\frac{\pi^4}{b_д^4} + \sin^2\frac{\pi z}{l_д} \times\right.\right.$$

$$\times \left(\cos\frac{\pi x}{b_д}+1\right)^2\frac{\pi^4}{l_д^4}+\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\cos\frac{\pi x}{b_д}\left(\cos\frac{\pi x}{b_д}+1\right)\frac{\pi^4}{l_д^2 b_д^2}+$$
$$+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\sin^2\frac{\pi x}{b_д}\frac{\pi^2}{b_д^2}+\frac{1}{8}\cos^2\frac{\pi z}{l_д}\left(\cos\frac{\pi x}{b_д}+1\right)^2\frac{\pi^2}{l_д^2}\Bigg]\Bigg\}dx=0. \tag{8.37}$$

Ширина контактной поверхности $b_д$ уменьшается по длине очага деформации, т. е. является функцией z. Примем эту функцию линейной (см. рис. 85):

$$b_д=\frac{z}{l_д}b_0. \tag{8.38}$$

Преобразуем (8.37) к виду

$$\bar{\Phi}=\int_0^{l_д}dz\int_{-0{,}5b_д}^{0{,}5b_д}\left(C_1\cos^2\frac{\pi x}{b_д}+C_2\cos\frac{\pi x}{b_д}+C_3+\right.$$
$$\left.+C_4\sin\frac{\pi x}{b_д}\right)dx=0; \tag{8.39}$$

где

$$C_1=-\frac{s^2}{9\varepsilon_i}\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\left(\frac{\pi^4}{b_д^4}+\frac{\pi^4}{l_д^4}+\frac{\pi^4}{l_д^2 b_д^2}\right)+\frac{1}{8}\cos^2\frac{\pi z}{l_д}\frac{\pi^2}{l_д^2};$$
$$C_2=-\frac{s^2}{9\varepsilon_i}\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\left(2\frac{\pi^4}{l_д^4}+\frac{\pi^4}{l_д^2 b_д^2}\right)+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi z}{l_д}\frac{\pi^2}{l_д^2};$$
$$C_3=-\frac{s^2}{9\varepsilon_i}\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\frac{\pi^4}{l_д^4}+\frac{1}{8}\cos^2\frac{\pi z}{l_д}\frac{\pi^2}{l_д^2};$$
$$C_4=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi z}{l_д}\frac{\pi^2}{b_д^2}.$$

Проинтегрируем по x

$$\bar{\Phi}=\int_0^{l_д}dz\left[C_1\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin\frac{2\pi x}{b_д}}{4\pi/b_д}\right)+C_2\frac{\sin\frac{\pi x}{b_д}}{\pi/b_д}+\right.$$
$$\left.+C_3x+C_4\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin\frac{2\pi x}{b_д}}{4\pi/b_д}\right)\right]\Bigg|_{-b_д/2}^{b_д/2}=0.$$

Подставляя пределы, получаем

$$\bar{\Phi}=\int_0^{l_д}dz\left(C_1\frac{b_д}{2}+C_2\frac{2b_д}{\pi}+C_3b_д+C_4\frac{b_д}{2}\right)=0.$$

Введем значения функций от z (8.39) и перегруппируем для интегрирования по этой координате с учетом (8.38):

$$\left.\begin{aligned}
\Phi = \int_0^{l_д} dz \Big[& B_1 \sin^2\left(\frac{\pi z}{l_д}\right)\frac{1}{z^3} + B_2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{l_д}\right)\frac{1}{z} + B_3 \sin^2 \times \\
& \times \left(\frac{\pi z}{l_д}\right) z + B_4 \cos^2\left(\frac{\pi z}{l_д}\right) z \Big] = 0; \\
B_1 = & -\frac{s^2}{18\varepsilon_i}\frac{\pi^4 l_д^3}{b_0^3}; \\
B_2 = & -\frac{s^2}{18\varepsilon_i}\left(\frac{\pi^4}{b_0 l_д} + \frac{4\pi^3}{b_0 l_д}\right) + \frac{1}{8}\frac{\pi^2 l_д}{b_0}; \\
B_3 = & -\frac{s^2}{18\varepsilon_i}\left(\frac{2\pi^4 b_0}{l_д^5} + \frac{\pi^3 b_0}{l_д^5}\right); \\
B_4 = & \frac{3}{16}\frac{\pi^2 b_0}{l_д^3} + \frac{1}{4}\frac{\pi^3 b_0}{l_д^3}.
\end{aligned}\right\} \quad (8.40)$$

Для интегрирования по z заменим $\sin^2 \frac{\pi z}{l_д}$ многочленами первых степеней $\cos \frac{2\pi z}{l_д}$:

$$\bar{\Phi} = \int_0^{l_д} dz \left[\frac{B_1}{2}\frac{1}{z^3} - \frac{B_1}{2}\cos\left(\frac{2\pi z}{l_д}\right)\frac{1}{z^3} + \frac{B_2}{2}\frac{1}{z} - \right.$$
$$\left. - \frac{B_2}{2}\cos\left(\frac{2\pi z}{l_д}\right)\frac{1}{z} + B_3 \sin^2\left(\frac{\pi z}{l_д}\right) + B_4 \cos^2\left(\frac{\pi z}{l_д}\right) z\right] = 0.$$

Проинтегрируем по z

$$\bar{\Phi} = \left[-\frac{B_1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{B_1}{2}\cos\left(\frac{\pi z}{l_д}\right)\frac{1}{2z^2} - \frac{B_1}{2}\frac{\pi}{l_д}\sin^2\left(\frac{\pi z}{l_д}\right)\frac{1}{z} + \right.$$
$$+ \frac{B_1}{2}\frac{2\pi^2}{l_д^2}\mathrm{Ci}\left(\frac{2\pi z}{l_д}\right) + \frac{B_2}{2}\ln z - \frac{B_2}{2}\mathrm{Ci}\left(\frac{2\pi z}{l_д}\right) + \frac{B_3}{4}z^2 -$$
$$- B_3\frac{l_д^2}{16\pi^2}\cos\left(\frac{4\pi z}{l_д}\right) - B_3\frac{z l_д}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi z}{l_д}\right) + \frac{B_4}{4}z^2 +$$
$$\left. + B_1\frac{l_д^2}{16\pi^2}\cos\left(\frac{4\pi z}{l_д}\right) + B_4\frac{z l_д}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi z}{l_д}\right)\right]\Bigg|_0^{l_д} = 0. \quad (8.41)$$

Здесь интегральный косинус $\mathrm{Ci}\left(\frac{2\pi z}{l_д}\right) = \int \cos\frac{2\pi z}{l_д}\frac{1}{z}\,dz$.

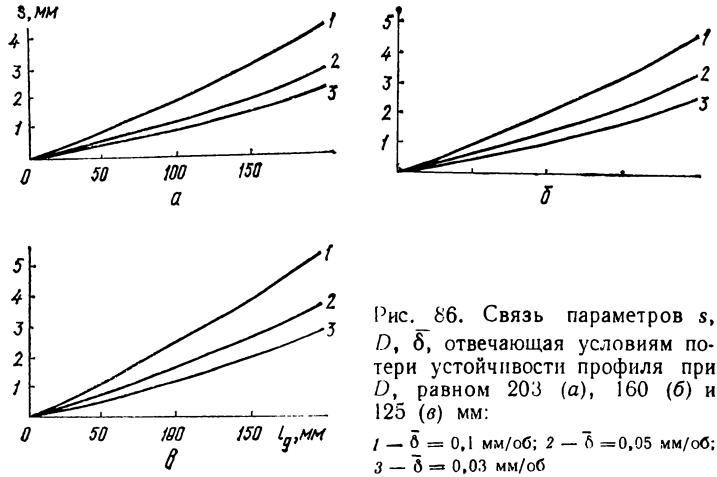

Рис. 86. Связь параметров s, D, $\bar{\delta}$, отвечающая условиям потери устойчивости профиля при D, равном 203 (*а*), 160 (*б*) и 125 (*в*) мм:

1 — $\bar{\delta}$ = 0,1 мм/об; *2* — $\bar{\delta}$ = 0,05 мм/об; *3* — $\bar{\delta}$ = 0,03 мм/об

После подстановки пределов, используя в качестве нижнего предела конечную малую величину, получаем

$$\bar{\bar{\Phi}} = \frac{B_2}{2} \ln l_д + B_3 \frac{l_д^2}{4} + B_4 \frac{l_д^2}{4} = 0.$$

Подставляя значения постоянных (8.40), записываем условие устойчивости

$$\frac{10s^2}{\varepsilon_i} (l_д^2 \ln l_д + b_0^2) + l_д^4 \ln l_д + 3{,}9 b_0^2 l_д^2 = 0, \qquad (8.42)$$

объединяющее геометрические параметры заготовки, очага деформации и интенсивность деформации. Условие (8.42) позволяет выбрать оптимальное соотношение степени деформации и геометрии очага деформации при заданном размере заготовки.

На рис. 86 приведена графическая интерпретация условия (8.42) для некоторых размеров заготовок, использованная для оптимизации режима обжатий. Результаты экспериментов и расчетов по условию (8.42) удовлетворительно согласуются.

1. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент.— М.: Наука, 1979.— 224 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике.— М.: Наука, 1966.— 300 с.
3. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды.— 2-е изд.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 288 с.
4. *Гун Г. Я.* Теоретические основы обработки металлов давлением.— М.: Металлургия, 1980.— 456 с.
5. *Полухин В. П., Савченко В. С., Персиянов С. В.* К расчету температурных полей в металлах, подвергающихся световому потоку большой плотности.— В кн.: Теория и технология деформации металлов. М. : Металлургия, 1982, с. 5—7. (Науч. тр. / МИСиС; № 145).
6. *Глаголев Н. И., Акаро И. Л., Норицина Г. И.* Исследование механики процесса прессования с учетом температурно-скоростного фактора.— Исслед. и внедрение прогрес. технологии штамповки: Науч. тр. / МАМИ. М., 1971, с. 128—142.
7. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел : Пер. с англ. М. : Наука, 1964.— 488 с.
8. *Полухин П. И., Горелик С. С., Воронцов В. К.* Физические основы пластической деформации.— М. : Металлургия, 1982.— 584 с.
9. *Надаи А.* Пластичность / Пер. с англ. под ред. Л. С. Лейбензона.— М. ; Л. : ОНТИ, 1936.— 280 с.
10. *Полухин П. И., Гун Г. Я., Галкин А. М.* Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов : Справочник.— 2-е изд.— М. : Металлургия, 1983.— 352 с.
11. *Lindholm U. S.* Some experiments in dynamic plasticity under combined stress.— In: Sympos. Mech. Behavior Materials under Dynamic Loads. San Antonio (Tex.), 1968, p. 42—61.
12. *Clark D. S., Duwez P. E.* The influence of strain rate on some tensile properties of steel.— Proc. Amer. Soc. Testing Materials, 1950, vol. 50, N 2, p. 31—46.
13. *Зайков М. А.* Прочность углеродистых сталей при высоких температурах.— Журн. техн. физики, 1948, **19**, № 6, с. 112—121.
14. *Соколов Л. Д.* Влияние скорости на сопротивление металлов пластическому деформированию.— Там же, 1946, **16**, № 4, с. 71—86.
15. *Губкин С. И.* Пластическая деформация металлов. Т. 2. Физико-химическая теория пластичности.— М. : Металлургиздат, 1960.— 416 с.
16. *Мигачев Б. А., Потапов А. И.* Пластичность инструментальных сталей и сплавов : Справочник.— М.: Металлургия, 1980.—88 с.
17. *Третьяков А. В., Зюзин В. И.* Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением : Справочник.— М. : Металлургия, 1973.— 224 с.

18. *Полухин П. И., Галкин А. М., Зайков А. М.* Исследование сопротивления деформации стали Р18 в зависимости от термомеханических параметров деформирования.— Обраб. металлов давлением, 1980, № 7, с. 54—57.
19. *Грудев А. П.* Внешнее трение при прокатке.— М. : Металлургия. 1973.— 288 с.
20. *Voelkner W.* Experimentelle Methoden der Ermittlung mittlerer Reibungskenngroßen.— Fertigstechn. und Betr., 1976, **26**, № 11, p. 678—681.
21. *Чекмарев А. П., Онищенко И. И.* Распределение удельных сил трения при контактной поверхности при прокатке.— Изв. вузов. Черн. металлургия, 1967, № 10, с. 112—116.
22. *Контактное* трение в процессах обработки металлов давлением / А. Н. Леванов, В. Л. Колмогоров, С. П. Буркин и др.— М. : Металлургия, 1976.— 416 с.
23. *Гуляев Ю. Г., Друян В. М.* Метод решения задач теории пластичности.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1982, № 9, с. 150—151.
24. *А. с. 967660 (СССР).* Способ экспериментального исследования процессов обработки металлов давлением / В. М. Друян, Ю. Г. Гуляев, Ю. Ю. Рынкевич, О. И. Лев.— Заявл. 14.04.81, № 3280635/25—27; Опубл. в Б. И. , 1982, № 39, с. 36; МКИ В21в 5/00.
25. *Смирнов В. С.* Теория обработки металлов давлением.— М.: Металлургия, 1973.— 496 с.
26. *Теория* обработки металлов давлением / И. Я. Тарновский, А. А. Поздеев, О. А. Ганаго и др.— М.: Металлургиздат, 1963.— 672 с.
27. *Грудев А. П., Зильберг Ю. В., Тилик В. Т.* Трение и смазки при обработке металлов давлением : Справочник.— М.: Металлургия, 1982.— 312 с.
28. *Исаченко Е. И.* Контактное трение и смазка при обработке металлов давлением.— М.: Машиностроение, 1978.— 208 с.
29. *Клименко П. Л., Гаращенко В. И.* Метод определения модуля скорости пластического сдвига при прокатке.— Обраб. металлов давлением. Науч. тр. / ДМетИ, 1976, с. 16—23.
30. *Потапов И. Н., Балакин В. Ф., Гуляев Ю. Г. и др.* Теоретический анализ условий контактного взаимодействия при гидроэкструзии.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1982, № 3, с. 56—60.
31. *Сафаров Ю. С., Гаращенко В. И.* К вопросу о выборе оптимальной геометрии инструмента при прессовании.— Кузнечно-штампов. пр-во, 1971, № 12, с. 8—11.
32. *Теория* пластических деформаций металлов / Е. П. Унксов, У. Джонсон, В. Л. Колмогоров и др.; Под ред. Е. П. Унксова, А. Г. Овчинникова.— М. : Машиностроение, 1983.— 598 с.
33. *Паршин В. А., Зудов Е. Г., Колмогоров В. Л.* Деформируемость и качество.— М.: Металлургия, 1979.— 192 с.
34. *Богатов А. А., Колмогоров В. Л., Матвеев Г. А.* Экспериментальная проверка условия разрушения металла при различных схемах нагружения.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1970, № 8, с. 76—80.
35. *Медведев М. И., Лоскутов П. А., Ратнер А. Г.* Бесшовные трубы.— М. : Металлургия, 1980.— 156 с.
36. *Bik J., Hoderny B., Wusatowski R.* Odksztalcenie graniczne przy wysokotemperaturowym od Ksztalceniu ciaglym.— Pr. Inst. Metal. Zelaza, 1981, **33**, N 1, p. 15—22.
37. *Elfmark J.* Fyzikalni zaklady tvaritelnosti ocell za tepla.— Sb. ved. pr. VSB Ostrave, 1979, **25**, N 1/2, p. 49—75.

38. *Алюшин Ю. А.* Связь критериев упрочнения с изменением внутренней энергии и плотности материала в процессе деформации.— В кн.: Обработка металлов давлением. Науч. тр./ Ростов. н/Д ун-т, 1980, с. 9—13.
39. *Кийко И. А.* Теория разрушения в процессах пластического течения.— Обраб. металлов давлением, 1982, № 9, с. 27—40.
40. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы.— М. : Наука, 1981.— 416 с.
41. *Лисицин Б. М., Вериженко В. Е.* Об одном направлении развития метода конечных элементов.— Прикл. механика, 1978, **14**, № 4, с. 33—40.
42. *Finlayson B. A.* Applications of the method of weighted residuals and variational methods.— Brit. Chem. Eng., 1969, **14**, N 1, p. 53—57.
43. *Люстернек Л. А., Янпольский А. Р.* Математический анализ.— М. : Физматгиз, 1961.— 247 с.
44. *Ван Цзи-де.* Прикладная теория упругости / Пер. с англ. под ред. А. С. Вольмира.— М.: Физматгиз, 1959.— 400 с.
45. *Гуляев Ю. Г., Лев О. И.* Метод решения задач динамики вязкой жидкости.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1983, № 3, с. 152.
46. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды.— М. : Наука, 1983.— 448 с.
47. *Смирнов В. С.* Теория пластичности и развитие прогрессивных методов обработки металлов давлением в СССР за 50 лет.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1967, № 10, с. 44—49.
48. *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики / Пер. с англ. под ред. В. Н. Жаркова.— М.: Мир, 1970.— Вып. 2. 352 с.
49. *Марков А. А.* О вариационных принципах в теории пластичности.— Прикл. математика и механика, 1947, **11**, № 3, с. 339—350.
50. *Смирнов В. К.* Об использовании вариационных уравнений принципов Журдена и минимума полной мощности для решения задач с заранее неизвестными границами пластического очага деформации.— Обраб. металлов давлением, 1977, № 4, с. 14—19.
51. *Гуляев Ю. Г., Друян В. М.* Метод решения вариационных задач теории пластичности.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1983, № 7, с. 46—49.
52. *Друян В. М., Гуляев Ю. Г.* Метод численного решения задач теории пластичности.— Там же, 1980, № 7, с. 139.
53. *Гуляев Ю. Г., Друян В. М.* Метод квазиадекватной модификации уравнений энергетического баланса в вариационных задачах теории пластичности.— Там же, 1983, № 1, с. 154—155.
54. *Гуляев Ю. Г., Друян В. М., Гуляев Г. И.* Потенциальный метод решения вариационных задач теории пластичности / ВНИ и конструкт.-технол. ин-т труб. пром-сти.— Днепропетровск, 1981.— 40 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, 26.01.82, № 1507 чм — Д/82. Деп.
55. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; Пер. с англ. под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Кармазиной.— М. : Наука, 1979.— 832 с.
56. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 420 с.
57. *Математическая* теория планирования эксперимента/ Под ред. С. М. Ермакова.— М.: Наука, 1983.— 392 с.
58. *Винарский М. С., Жадан В. Т., Кулак Ю. Е.* Математическая статистика в черной металлургии.— Киев : Техніка, 1973.— 220 с.

59. *Тьюки Дж.* Анализ результатов наблюдений : Развед. анализ / Пер. с англ. под ред. В. Ф. Писаренко.— М. : Мир, 1981.— 694 с.
60. *Друян В. М., Гуляев Ю. Г., Балакин В. Ф.* Анализ условий процесса прокатки труб в трехвалковом раскатном стане.— Обраб. металлов давлением : Науч. тр. / ДМетИ, 1980, № 60, с. 59—64.
61. *Джонсон Н., Лион Ф.* Статистика и планирование эксперимента в технике и науке : Методы обраб. данных / Пер. с англ. под ред. Э. К. Лецкого.— М. : Мир, 1980.— 612 с.
62. *Бондарь А. Г., Статюха Г. А.* Планирование эксперимента в химической технологии.— Киев : Вища шк., 1976.— 184 с.
63. *Гуляев Ю. Г., Милов Г. И., Рынкевич Ю. Ю.* Исследование параметров процесса прокатки в трехвалковом раскатном стане.— Металлургия и коксохимия, 1977, с. 32—36.
64. *Чукмасов А. С., Чукмасов С. А., Гуляев Ю. Г.* Технология производства горячепрессованных стальных труб из центробежнолитых заготовок.— Днепропетровск : НТО МЧМ УССР, 1983.— 24 с.
65. *Прессование* стальных труб и профилей / Г. И. Гуляев, А. Е. Притоманов, О. П. Дробич и др.; Под ред. Г. И. Гуляева.— М. : Металлургия, 1973.— 192 с.
66. *Борисов С. И., Притоманов А. Е.* Аналитический метод определения усилий при прессовании стальных труб.— В кн.: Инженерные методы расчета технологических процессов обработки металлов давлением : Сб. ст. / Под ред. И. Я. Тарновского. М. : Металлургиздат, 1964, с. 350—355.
67. *Гильденгорн М. С.* Совместное прессование разнопрочных металлов.— В кн.: Процессы обработки легких и жаропрочных сплавов: Сб. ст. М. : Наука, 1981, с. 59—64.
68. *Перлин И. П.* Теория прессования металлов.— М.: Металлургиздат, 1964.— 344 с.
69. *Прессование* алюминиевых сплавов : Мат. моделирование и оптимизация / Г. Я. Гун, В. И. Яковлев, Б. А. Прудковский и др.— М.: Металлургия, 1974.— 336 с.
70. *Горячее* гидропрессование металлических материалов / А. И. Колпашников, В. А. Вялов, А. А. Федоров, А. П. Петров.— М. : Машиностроение, 1977.— 271 с.
71. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности.— М. : Наука, 1969.— 420 с.
72. *Ивата И., Осакада К., Фуджина Б.* Анализ гидростатического прессования методом конечных элементов.— Конструирование и технология машиностроения, 1972, № 2, с. 212—224.
73. *Стукач А. Г., Степаненко В. И.* Механика процесса прессования.— Научн. тр. / УПИ, 1976, № 3, с. 98—104 .
74. *Непершин Р. И.* О решении задач плоского пластического течения жесткопластического тела с кинематическими граничными условиями.— В кн.: Расчеты пластического деформирования металлов : Сб. ст. / Под ред. А. Д. Томленова. М. : Наука, 1975, с. 54—75.
75. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике / Пер. с англ. под ред. И. Г. Арамановича.— 2-е изд.— М. : Наука, 1970.— 720 с.
76. *Динник А. А.* Истинные пределы текучести при горячей прокатке стали.— В кн.: Теория прокатки : Сб. науч. работ / Под ред. А. П. Чекмарева. М. : Металлургиздат, 1962, с. 157—170.
77. *Гуляев Ю. Г., Друян В. М., Довлядова Н. В.* Оптимальные условия прессования биметаллических труб.— Трубы из легир. сталей : Науч. тр. / МЧМ СССР, 1984, с. 17—20.
78. *Решение* задачи о формоизменении биметаллической заготовки при прессовании / А. С. Чукмасов, Ю. Г. Гуляев, В. М. Друян и др.—

Днепропетровск, 1981.— 28 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, 03.07.81, № 1326. Деп.
79. *Изменение* поперечной разностенности труб при деформации на оправке / В. П. Сокуренко, П. Н. Ившин, В. Б. Чебаков, Е. И. Губарь.— В кн.: Производство труб для энергетики : Науч. тр. / МЧМ СССР, М.: 1981, с. 45—48.
80. *Гуляев Ю. Г., Чукмасов С. А.* Производство труб гидроэкструзией.— Киев : УкрНИИНТИ, 1984.— 21 с.
81. *Павлов И. М.* Неоднородность в связи с пластической деформацией металла.— В кн.: Пластичность металлов и сплавов с особыми свойствами : Сб. ст. / Ин-т металлургии им. А. А. Байкова. М.: Наука, 1982, с. 5—17.
82. *Охрименко Я. П.* Полезное действие трения в процессах штамповки, прессования и выдавливания.— Кузнечно-штампов. пр-во, 1981, № 6, с. 17—20.
83. *Ганаго О. А.* Проблемы оптимизации кузнечно-штампов. пр-ва.— Там же, № 8, с. 3—6.
84. *Мальцев М. В., Доронькин Б. Д., Езерский К. И.* Гидростатическая обработка тугоплавких металлов.—М.: Металлургия, 1978.—272 с.
85. *Остренко В. Я., Касьян В. Х., Филоненко П. В.* Исследование динамики процесса гидростатического прессования труб.— Пр-во труб, 1978, № 3, с. 34—41.
86. *Деформация* металлов жидкостью высокого давления / В. И. Уральский, В. С. Плахотин, Н. И. Шефтель.— М. : Металлургия, 1976.— 424 с.
87. *Громов Н. П.* Обработка металлов давлением.— М. : Металлургия, 1976.— 360 с.
88. *Прозоров Л. В., Костава А. А., Ревтов В. Д.* Прессование металлов жидкостью высокого давления.— М. : Машиностроение, 1972.— 152 с.
89. *Бургвиц А. Г., Модерау П. В., Улицкий Р. Я.* О реализации процесса гидропрессования в режиме гидродинамической смазки.— Физика и химия обраб. материалов, 1978, № 4, с. 81—85.
90. *Thiruvardichenyan S., Alexander J. M.* Hydrodynamic Lubrication in Hydrostatic Extrusion Using a Double Reduction Die.— Int. J. Machine Tool Design and Res., 1971, **11**, p. 251—257.
91. *Kaujalgu V. B.* An Hydrodynamic Model of Hydrostatic Extrusion With Variable Lubrication Film Thickness.— Int. J. Product. Res., 1970, **8**, p. 315—318.
92. *Heller M. J.* A Hydrodynamic Model of Hydrostatic Extrusion. — Ibid., 1966, **5**, N 2, p. 171—174.
93. *Wilson W. R. D., Walowit J. A.* An Isothermal Hydrodynamic Lubrication Theory for Hydrostatic Extrusion and Drawing Process With Conical Dies.— J. Lubr. Technol. Trans. ASME. Ser. F, 1971, **9**, N 1, p. 69—72.
94. *Snidle R. W., Dowson D., Parsons B.* Written contribution to discussion on reference.— Ibid., 1971, **92**, N 3, p. 437—443.
95. *Snidle R. W., Parsons B., Dowson D.* An Elasto-Plasto-Hydrodynamic Lubrication Analysis of the Hydrostatic Extrusion Process Including the Effects of strain Hardening and Redudant Deformation.— In: Sympos. Elastohydrodinam. Lubr. Inst. Mech. Eng., 1972, p. 107—109.
96. *Snidle R. W., Dowson D., Parsons B.* An Elasto-Plasto-Hydrodynamic Lubrication Analysis of the Hydrostatic Extrusion Process.— J. Lubr. Technol. Trans. ASME. Ser. F, 1972, **95**, N 2, p. 113—119.

97. *Machdavian S. M., Wilson W. R. D.* Lubricant Flow In a Plastohydrodynamic Work Zone.— Ibid., 1976, 98, N 1, p. 16—21.
98. *Wilson W.R. D., Machdavian S. M.* Hydrodynamic Lubrication of Hydrodynamic Extrusion.— Ibid., 1975, 98, p. 27—31.
99. *Avitzur B.* Analysis of Wire Drawing and Extrusion Through Dies of Small Cone Angle.— J. Eng. Indust., 1963, 85, p. 89—95.
100. *Snidle R. W., Parsons B., Dowson D.* Thermal Hydrodynamic Lubrication Theory for Hydrostatic Extrusion Technology.— Trans. ASME. Ser. F., 1975, 98, N 2, p. 335—342.
101. *Залесский В. И., Векшин Б. С.* Течение вязкой жидкости через коническую щель.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1974, № 1, с. 104—107.
102. *Колмогоров Г. Л., Мельников Т. Е.* Вопросы гидродинамической смазки при прессовании материалов жидкостью высокого давления.— Физика и техника высоких давлений, 1981, № 3, с. 91—96.
103. *Строчков И. А., Спусканюк В. З., Черный Ю. Ф.* Аналитическая и экспериментальная зависимость давления гидропрессования от степени деформации.— Там же, с. 96—101.
104. *Строчков И. А., Спусканюк В. З.* Исследование модели нестационарного процесса прессования жидкостью.— Там же, № 15, с. 14—21.
105. *Декун А. М., Береснев Б. И.* Стабилизация смазки при прессовании профилей и возможность увеличения стойкости матриц.— Там же, 1984, № 15, с. 24—31.
106. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.— М. : Наука, 1970.— 904 с.
107. *А. с. № 890062 (СССР).* Способ определения параметров деформации при обработке металлов давлением / Ю. Г. Гуляев, В. Ф. Балакин.— Заявл. 20.02.80, № 2884993/25—28.— Опубл. в Б. И., 1981, № 46, с. 201; МКИ*G01B*/5/30.
108. *Гуляев Г. И., Гуляев Ю. Г.* Выбор оптимальных параметров гидроэкструзии труб для энергетической промышленности.— Пр-во труб для энергетики : Науч. тр. / МЧМ СССР, 1981, с. 13—17.
109. *Новая* технология производства толстостенных труб малого диаметра / Г. И. Гуляев, В. Ф. Балакин, Ю. Г. Гуляев и др.— Чер. металлургия : Бюл. НТИ, 1981, № 10, с. 54—55.
110. *Ильюшин А. А.* Пластичность.— М. : Л. : Гостехиздат, 1948.— 372 с.
111. *А. с. 800608 (СССР).* Способ определения параметров деформации в процессе обработки металлов давлением и устройство для его осуществления / Ю. Г. Гуляев, В. Ф. Балакин.— Заявл. 15.02.79, № 2726276/22—02.— Опубл. в Б. И., 1981, № 4, с. 141; МКИ *G01B* 5/30.
112. *Балакин В. Ф., Гуляев Ю. Г.* Исследование изменения исходной разностенности заготовки в процессе оправочного гидропрессования труб.— Обраб. металлов давлением : Науч. тр. / ДМетИ, 1980, № 60, с. 79—84.
113. *Силовые* условия редуцирования труб методом гидроэкструзии / В. Ф. Балакин, Ю. Г. Гуляев, Р. Е. Штейн, Ю. Б. Жуковский.— Там же, с. 91—96.
114. *Механические* свойства материалов под высоким давлением : Пер. с англ. / Под ред. Х. Пью.— М. : Мир, 1973.— Вып. 1—2.
115. *Ваткин Я. Л., Друян В. М.* Расчет усилий при оправочной прокатке труб.— Обраб. металлов давлением : Науч. тр. / ДМетИ, 1967, № 52, с. 156—164.
116. *Чекмарев И. А., Семенюта А. Я.* Теоретическое исследование влияния контактных сил трения на удельное давление при про-

катке труб на длинной оправке.— Там же, 1971, № 56, с. 253—268.
117. *Анализ* контактного взаимодействия при продольной оправочной прокатке труб / Г. И. Гуляев, В. М. Друян, Ю. Г. Гуляев, В. П. Удовиченко.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1982, № 5, с. 56—59.
118. *Исследование* деформации трубы при прокатке в круглом калибре на длинной оправке / Я. Л. Ваткин, А. А. Шевченко, Г. И. Гуляев и др.— Обраб. металлов давлением : Науч. тр./ ДМетИ, 1967, № 53, с. 163—177.
119. *Гуляев Ю. Г., Друян В. М., Чукмасов С. А.* Теоретическая математическая модель процесса продольной прокатки труб на цилиндрической оправке.— Металлургия и коксохимия, 1985, № 86, с. 52—56.
120. *Технология* непрерывной безоправочной прокатки труб / Г. И. Гуляев, П. Н. Ившин, И. Н. Ерохин и др. : Под ред. Г. И. Гуляева.— М.: Металлургия, 1975.— 264 с.
121. *Чекмарев А. П., Ваткин Я. Л.* Основы прокатки труб в круглых калибрах.— М.: Металлургиздат, 1962.— 222 с.
122. *Редукционные* станы / В. П. Анисифоров, Л. С. Зельдович, В. Д. Курганов и др.— М. : Металлургия, 1971.— 255 с.
123. *Данилов Ф. А., Глейберг А. З., Балакин В. Г.* Горячая прокатка и прессование труб.— М. : Металлургия, 1972.— 576 с.
124. *Гуляев Г. И.* Влияние технологических параметров на качество труб при непрерывной безоправочной прокатке : Дис. ... д-ра техн. наук.— М., 1977.— 411 с.
125. *Гуляев Ю. Г., Гуляев Г. И., Данченко Ю. В.* Теоретическое исследование процесса формирования поперечной разностенности при продольной безоправочной прокатке труб / ВНИТИ.— Днепропетровск, 1983.— 40 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ. 15.03.83, № 1918 чм — Д83. Деп.
126. *Друян В. М., Гуляев Ю. Г.* Исследование гранеобразования при трехвалковой прокатке труб.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1982, № 1, с. 74—77.
127. *Повышение* точности редуцированных конструкционных труб / В. П. Рукобратский, Ю. Г. Гуляев, Э. П. Бобриков, Ю. В. Данченко.— В кн. : Производство и применение экономичных профилей проката для тракторного и сельскохозяйственного машиностроения : Материалы Всесоюз. науч. конф. М. : НПО НАТИ, 1983, с. 57—58.
128. *Теория* редуцирования труб / В. В. Ериклинцев, Д. О. Фридман, Ю. И. Блинов, Л. М. Грабарник. — Свердловск : Сред.-урал. кн. изд-во, 1970.— 288 с.
129. *Бараненко В. А., Гуляев Ю. Г.* Оптимизация поперечной разностенности при безоправочной прокатке труб.— В кн.: Роль передового опыта в борьбе за высокую производительность труда : Материалы науч.-практ. конф. Днепропетровск, 1983, с. 68—71.
130. *Беллман Р.* Динамическое программирование : Пер. с англ.— М.: Изд.-во иностр. лит., 1960.— 400 с.
131. *Почтман Ю. М., Бараненко В. А.* Динамическое программирование в задачах строительной механики.— М. : Стройиздат, 1975.— 110 с.
132. *Капорович В. Г.* Производство деталей из труб обкаткой.— М. : Машиностроение, 1978. — 136 с.
133. *Целиков А. И., Нцкитин С. Г., Рокотян С. Е.* Теория продольной прокатки : Учебник для вузов. — М. : Металлургия, 1980.— 320 с.

134. *Несис Е. И.* Методы математической физики : Учеб. пособие. — М. : Просвещение, 1977.— 199 с.
135. *Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М.* Теория тепло- и массообмена / Пер. с англ. под ред. А. В. Лыкова.— М. : Л. : Госэнергоиздат, 1961. — 678 с.
136. *Швейкин В. В., Гун Г. Я., Ившин П. Н.* Устойчивость профиля поперечного сечения трубы при редуцировании.— Изв. вузов. Чер. металлургия, 1964, № 4, с. 88—92.
137. *Гуляев Г. И., Ившин П. Н., Янович В. К.* Устойчивость поперечного сечения труб при редуцировании.— В кн.: Теория и практика редуцирования труб : Материалы науч.-техн. конф. Челябинск, 1972, с. 103—109.
138. *Агеев К. П., Кривицкий Б. А.* Анализ условий устойчивости заготовок при обжиме в конической матрице.— Изв. вузов. Машиностроение, 1980, № 1, с. 94—101.
139. *Борисов С. И., Гацула А. К.* Устойчивость труб при закатке баллонов.— Пр-во труб / ВНИТИ, 1969, вып. 22, с. 160—165.
140. *Капорович В. Г., Ващук Л. Н.* Определение предельных обжатий при тангенциальной обкатке труб.— Кузнеч.-штампов. пр-во, 1979, № 2, с. 11—12.
141. *Алексеев Ю. Н.* Вопросы пластического течения металлов.— Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1958.— 187 с.
142. *Алфутов Н. А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем: Б-ка расчетчика.— М. : Машиностроение, 1978.— 312 с.
143. *Огибалов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1968.— 519 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Обзор развития методов моделирования процессов ОМД 5

Условные обозначения 11

Часть первая

Теоретические основы математического моделирования процессов ОМД 14

Глава первая

Общие сведения о математическом моделировании процессов ОМД 14

1. Классификация математических моделей 14
2. Принципы создания математических моделей 18
3. Оптимизация процессов ОМД с использованием математических моделей 25

Глава вторая

Интегральная АММ процесса ОМД 30

1. Постановка задачи и основные уравнения 30
2. Формулировка задачи и граничные условия 33
3. Законы теории ОМД 38

Глава третья

Методы реализации математических моделей процесса ОМД 64

1. Основные определения 64
2. Метод взвешенных невязок и его варианты 65
3. Энергетические методы 97
4. Метод квазиадекватной модификации уравнения энергетического баланса 100
5. Алгоритмы обработки экспериментальных данных 105

Часть вторая

Математическое моделирование технологических процессов ОМД 112

Глава четвертая

Прессование 112

1. Общая АММ процесса 112
2. АММ формирования концевой продольной разностенности при прессовании биметаллических труб 125
3. Статистическая методика определения длины концевой обрези при прессовании биметаллов 133
4. Определение геометрических параметров центробежнолитых биметаллических заготовок 136

Глава пятая

Гидроэкструзия 140

1. Контактное взаимодействие при гидроэкструзии сплошных изделий. 140
2. Контактное взаимодействие и параметры формоизменения при гидроэкструзии цилиндрических труб 152
3. Инерционные эффекты при гидроэкструзии. 167

Глава шестая

Продольная оправочная прокатка труб 173

1. Одноклетевая прокатка 173
2. Непрерывная прокатка 177

Глава седьмая

Редуцирование труб 183

1. Изменение средней толщины стенки 183
2. Формирование поперечной разностенности 189
3. Оптимизация процесса редуцирования 207

Глава восьмая

Тангенциальная обкатка труб 215

1. АММ определения усилий деформации 215
2. Условие устойчивости формы заготовки при обкатке . . . 221

Список литературы 230

Юрий Геннадиевич Гуляев
Сергей Александрович Чукмасов
Алексей Владимирович Губинский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Редактор Н. И. СУХОМЛИНСКАЯ
Художественный редактор И. Г. ЛАГУТИН
Технические редакторы Б. М. КРИЧЕВСКАЯ, Т. С. БЕРЕЗЯК
Корректоры А. И. СМОЛКИНА, Э. М. КИЯНСКАЯ,
Е. С. МИРЗАМУХАМЕДОВА

ИБ № 7339

Сдано в набор 28.06.85. Подп. в печ. 18.02.86. БФ 01026. Формат 84×108/32. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 12,6. Усл. кр.-отт. 12,6. Уч.-изд. л. 14,13. Тираж 2000 экз. Заказ 6-108. Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Наукова думка». 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе. 310057 Харьков 57 Донец-Захаржевского, 6/8 на книжной фабрике «Коммунист». 310012, Харьков 12, ул. Энгельса, 11.

Ю. Г. Гуляев, С. А. Чукмасов, А. В. Губинский